Compétences transverses

Willie Robert
Physique-chimie – MP*
Lycée Charlemagne

19 août 2026

Table des matières

A Unités et dimensions **1**
- I Grandeur . . . 1
- II Système international de grandeurs . . . 1
- III Dimensions et unités . . . 1
  - III.1 Dimensions . . . 1
  - III.2 Unités . . . 1
  - III.3 Grandeurs sans dimension . . . 2
  - III.4 Règles à respecter . . . 2
  - III.5 Exemple de vérification d'homogénéité . . . 3
- IV Consignes de résolution et de rédaction . . . 3

B Chiffres significatifs **4**
- I Chiffres significatifs . . . 4
- II Arrondis . . . 4
- III Résultats des calculs numériques . . . 5

C Tests de vraisemblance **6**
- I Définition . . . 6
- II Tests d'homogénéité . . . 6
- III Autres tests . . . 6
- IV Exemples . . . 7

D Incertitudes de mesures **8**
- I Introduction . . . 8
  - I.1 Vocabulaire . . . 8
  - I.2 Variabilité des grandeurs physiques . . . 8
  - I.3 Histogrammes . . . 8
  - I.4 Incertitude-type . . . 9
- II Détermination de l'incertitude-type . . . 9
  - II.1 Variabilité observée – Type A . . . 9
  - II.2 Absence de variabilité observée – Type B . . . 10
  - II.3 Schématisation du choix de la méthode d'estimation de l'incertitude . . . 13
- III Détermination de la valeur mesurée . . . 13
  - III.1 Définition . . . 13
  - III.2 Estimateurs . . . 13
- IV Incertitude-type composée . . . 14
  - IV.1 Combinaison linéaire . . . 14
  - IV.2 Produits et quotients . . . 14
  - IV.3 Autres situations . . . 14
  - IV.4 Comparaison des contributions à la variance . . . 14
  - IV.5 Exemple . . . 15
- V Compatibilité de deux valeurs . . . 15
  - V.1 Écart normalisé ou z-score . . . 15
  - V.2 Compatibilité entre deux valeurs mesurées . . . 16
  - V.3 Compatibilité entre une valeur mesurée et une valeur de référence . . . 16
  - V.4 Analyses des incompatibilités . . . 17
- VI Écriture des résultats du mesurage . . . 17

E Travaux pratiques et activités expérimentales **18**
I Introduction . . . 18
II Le cahier de laboratoire . . . 18
III Les comptes-rendus . . . 18
III.1 Rédaction . . . 18
IV Les graphiques . . . 19
V Tableau de valeurs numériques . . . 19

E Ajustements de modèles et comparaisons aux mesures **21**
I Introduction . . . 21
II Ajustements de modèles . . . 21
II.1 Ajustements linéaires . . . 21
II.2 Ajustements affines . . . 22
II.3 Autres ajustements . . . 22
III Comparaison modèles-mesures . . . 23
III.1 Barres d'incertitudes . . . 23
III.2 Résidus normalisés . . . 24
III.3 Détermination de la compatibilité (ou non-compatibilité) . . . 25

F Simulations de la variabilité **26**
I Introduction . . . 26
II Méthode de Monte Carlo . . . 26
III Simulation de la variabilité d'une grandeur . . . 26
IV Simulation de la variabilité de grandeurs composées . . . 29
V Variabilité des paramètres d'un modèle . . . 30

Annexes **31**

Chapitre A

Unités et dimensions

I Grandeur

Une « grandeur » est la propriété d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance, que l'on peut exprimer quantitativement sous forme d'un nombre et d'une référence. La référence peut être une unité de mesure, une procédure de mesure, un matériau de référence, ou une de leurs combinaisons.

II Système international de grandeurs

Par convention, il est décidé que dans le Système international il existe sept grandeurs de base indépendantes les unes des autres : longueur, masse, durée, courant électrique, température thermodynamique, quantité de matière et intensité lumineuse. Ces sept grandeurs de base forment le Système international de grandeurs.

III Dimensions et unités

III.1 Dimensions

Il convient tout d'abord de ne pas confondre les deux notions d'*unité* et de *dimension*. La dimension d'une grandeur physique définit la *qualité* de cette grandeur, tandis que l'unité permet d'en préciser la *quantité* (c'est-à-dire une valeur numérique). « Masse » est une dimension, « kilogramme » est une unité.
La dimension répond à la question « de quoi s'agit-il ? ».
La valeur et l'unité répondent à la question « combien y en a-t-il ? ».
À chacune des sept grandeurs de base est associée une dimension, indépendante du système d'unité, qui porte le même nom que la grandeur de base et à laquelle on associe un symbole (voir table A.1). Ces sept dimensions fondamentales sont cohérentes et permettent, par combinaison, d'exprimer la dimension de n'importe quelle grandeur physique. Ainsi, la dimension de *toute* grandeur physique peut être écrite sous la forme :

$$\boxed{\dim(G) \equiv^{\alpha} \mathsf{M}^{\beta}\,\mathsf{T}^{\gamma}\,\mathsf{I}^{\delta\ \varepsilon}\,\mathsf{N}^{\zeta}\,\mathsf{J}^{\eta}} \tag{A.1}$$

où les exposants α, β, γ, δ, ε, ζ et η sont des petits nombres, très souvent entiers.
Deux grandeurs ayant la même dimension sont dites homogènes physiquement.
Le calcul aux dimensions (ou encore équation aux dimensions) est fondamental en Sciences physiques. Il permet, en raisonnant uniquement sur les dimensions des grandeurs, de construire l'essentiel du résultat d'un calcul. Il permet surtout, quand on ne connaît pas la loi physique qui régit le phénomène, d'anticiper sa forme. Enfin, il permet de retrouver d'innombrables erreurs de calculs, en assurant l'*homogénéité physique des formules*. **Un résultat qui n'est pas homogène en dimension est forcément faux**.

III.2 Unités

À chaque grandeur de base, correspond également une unité de base. Il y a donc sept unités de base : mètre, kilogramme, seconde, ampère, kelvin, mole et candela. Ces sept unités constituent le Système international d'unités. Le système international d'unités n'est pas le seul système d'unité existant, ni même le seul utilisé (penser par exemple aux systèmes d'unités anglo-saxons) mais c'est le système accepté par la communauté scientifique internationale et qui a valeur légale en France comme dans de nombreux pays.

Dimension	Symbole	Unité du SI	Symbole
Longueur	L	mètre	m
Masse	M	kilogramme	kg
Temps	T	seconde	s
Intensité de courant électrique	I	ampère	A
Température	Θ	kelvin	K
Quantité de matière	N	mole	mol
Intensité lumineuse	J	candela	cd

TABLE A.1 – Grandeurs de base, et unités associées dans le système international et symboles des dimensions associées, d'après le Bureau international des poids et mesures (BIPM).

La valeur d'un volume peut ainsi être exprimée en « mètres-cubes » ou en « litre », mais seul le mètre-cube est une unité du SI.
Depuis mai 2019, les sept unités de base sont définies grâce à sept constantes fondamentales dont les valeurs conventionnelles sont reconnues exactes par la communauté scientifique (cf Annexes).

III.3 Grandeurs sans dimension

Il existe aussi des grandeurs sans dimension physique. Pour de telles grandeurs on a $\dim(G) \equiv 1$. C'est le cas par exemple de la densité qui est une grandeur définie comme le rapport de deux masses volumiques. La plupart des grandeurs sans dimension n'ont pas d'unité (ou plutôt leur unité est le chiffre « 1 ») mais ce n'est pas le cas de toutes : ainsi les angles plans sont définis comme le rapport de deux grandeurs de même dimension (la longueur de l'arc de cercle engendré par l'angle divisée par la longueur du rayon) mais sont exprimés avec une unité : le radian par exemple.

III.4 Règles à respecter

Addition et soustraction toutes les grandeurs additionnées ou soustraites doivent-être homogènes entre elles et le résultat de l'opération a la même dimension que chacun des termes.
Exemple : $\dim(x_2 - x_1) \equiv \dim(x_2) \equiv \dim(x_1)$.

Multiplication et division la dimension d'une grandeur qui est le produit, respectivement le quotient, de deux autres grandeurs est le produit, respectivement le quotient des dimensions de ces grandeurs.
Exemple : $\dim\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \equiv \frac{\dim(x_2)}{\dim(x_1)}$.

Dérivation la dimension de la dérivée d'une grandeur est la dimension de la grandeur divisée par la variable par rapport à laquelle on dérive.
Exemple : $v(t) = x'(t) = \dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ donc $\dim(v) = \frac{\dim(x)}{\dim(t)} \equiv \mathsf{L}.\mathsf{T}^{-1}$.

Intégration la dimension de l'intégrale ou de la primitive d'une grandeur est la dimension de la grandeur multipliée par la variable par rapport à laquelle on intègre.
Exemple : $x(t) = \int v(t)\mathrm{d}t$ donc $\dim(x) = \dim(v)\ \dim(t) \equiv \mathsf{L}.\mathsf{T}^{-1}.\mathsf{T} \equiv \mathsf{L}$.

Autres expressions si une expression ne peut pas être mise sous la forme d'additions, soustractions, multiplications, divisions, intégrations ou dérivations de grandeurs de dimensions connues, alors les grandeurs intervenant dans l'expression doivent former un terme sans dimension et l'expression elle-même est alors sans dimension.
Exemple 1 : l'expression $\cos(\omega\, t)$. Pour que cette expression soit correcte il faut que $\dim(\omega\, t) \equiv \dim(\omega)\dim(t) \equiv 1$ et donc $\dim(\omega) \equiv \frac{1}{\dim(t)}$. D'autre part, on aura toujours $\dim(\cos(\omega\, t)) \equiv 1$.
Exemple 2 : soient ω_1 et ω_2 ayant une dimension identique et $\dim(\omega_1) \equiv \dim(\omega_2) \neq 1$. L'expression $y = \log\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$ est correcte en dimensions parce $\dim\left(\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\right) \equiv 1$. En revanche écrire $y = \log(\omega_1) - \log(\omega_2)$ est correct mathématiquement mais pas acceptable physiquement car si on isole le terme $\log(\omega_1)$, il n'est pas possible de lui attribuer un dimension physique respectant l'équation A.1.

III.5 Exemple de vérification d'homogénéité

On souhaite vérifier l'homogénéité de la formule $||\vec{F}|| = m\,\frac{v^2}{R}$ où $\vec{F}$ est un vecteur représentant une force, m une masse, v une vitesse et R une longueur. Pour vérifier qu'un résultat est homogène en dimension, il faut d'abord être capable d'exprimer la dimension physique de tous les termes qui composent ce résultat et donc, dans notre exemple, notamment la dimension d'une force. Pour cela on s'appuie généralement sur des lois ou des équations physiques bien connues. Par exemple, pour déterminer la dimension d'une force, on peut se rappeler que la relation fondamentale de la dynamique permet d'écrire $||\vec{F}|| = m\,||\vec{a}||$, ce qui mène à : $\dim(||\vec{F}||) \equiv \dim(m)\dim(||\vec{a}||)$. Compte tenu de $\dim(||\vec{a}||) \equiv \mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-2}$, on a donc

$$\dim(||\vec{F}||) \equiv \mathsf{M}\,\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-2}$$

Ensuite, il est possible de vérifier que :
$\dim(m\,\frac{v^2}{R}) \equiv \frac{\dim(m)(\dim(v))^2}{(\dim(R))}$ et donc $\dim(m\,\frac{v^2}{R}) \equiv \frac{\mathsf{M}\,(\mathsf{L}\mathsf{T}^{-1})^2}{\mathsf{L}} \equiv \mathsf{M}\,(\mathsf{L}\mathsf{T}^{-1})^2\,\mathsf{L}^{-1}$ ou encore $\dim(m\,\frac{v^2}{R}) \equiv \mathsf{M}\,\mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-2}\mathsf{L}^{-1} \equiv \mathsf{M}\,\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-2}$ ce qui prouve l'homogénéité de la formule étudiée.

IV Consignes de résolution et de rédaction

On commence toujours par analyser les problèmes proposés :

- quelles sont les grandeurs citées dans l'énoncé ?
- quelles sont les grandeurs utiles pour compléter l'énoncé ?
- quelles sont leurs dimensions ?
- chaque grandeur a-t-elle une notation littérale ? si non, en attribuer une ;
- quelles lois/relations, quels modèles permettent de relier les unes aux autres ?

Il faut ensuite toujours **mener le calcul de manière littérale aussi loin que possible** (c'est-à-dire jusqu'à la réponse demandée !). **Ne pas remplacer les grandeurs littérales par leurs valeurs numériques avant d'avoir terminé le calcul**. Avant de procéder à une application numérique, on doit pouvoir répondre positivement à la question suivante :

« Dans l'expression littérale de mon résultat y a-t-il bien : à gauche la réponse à la question et à droite uniquement des données de l'énoncé ou des données connues ? »

Si la réponse est non, le calcul littéral n'est pas terminé.
Si le calcul littéral est terminé, on procède ensuite systématiquement à une vérification de l'**homogénéité de votre résultat**, en s'assurant que la dimension physique est la même à droite et à gauche de votre équation.
Une application numérique (qui est toujours *précédée* d'une réponse littérale), doit toujours mentionner **une unité** (sauf mention particulière – « unité arbitraire » dans l'énoncé par exemple – et si la grandeur en a une, évidemment).
Si le résultat littéral n'est pas présent, il est tributaire des données de l'énoncé et il est impossible de le généraliser à d'autres situations similaires. De plus, seule cette expression littérale permet de vérifier, par un calcul aux dimensions, que le résultat a un sens physique (même dimension des deux côtés du signe égalité notamment).
Une fois le résultat littéral vérifié, on réalise éventuellement l'application numérique, en la munissant d'une **unité**. D'une manière générale, un résultat numérique sans unité sera compté faux.

Chapitre B

Chiffres significatifs

I Chiffres significatifs

Les zéros situés à l'extrême gauche d'un nombre ou précédés uniquement d'autres zéros ne sont pas significatifs. Tous les autres chiffres sont significatifs.
Exemples :

- 2,0 : deux chiffres significatifs,
- $0{,}020 = 2{,}0 \times 10^{-2}$: deux chiffres significatifs,
- $8300 = 8{,}300 \times 10^{3}$: quatre chiffres significatifs,
- 0,7 : un chiffre significatif.

II Arrondis

Compte tenu de ce qui précède, il convient de savoir adapter le nombre de chiffres significatifs d'un résultat numérique, ce qui peut être fait par des méthodes d'arrondis.
Parmi les nombreuses méthodes d'arrondis possibles, on retiendra la méthode arithmétique ou encore « méthode de l'arrondi au plus proche ». L'idée est de séparer les chiffres en deux paquets égaux de cinq valeurs $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ d'une part et $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ d'autre part. On note le dernier chiffre significatif : s'il est suivi d'un chiffre strictement inférieur à 5, on ne fait rien ; si le dernier chiffre significatif est suivi d'un chiffre supérieur ou égal à 5, on l'augmente de 1.
Exemples : 1,501 s'arrondit à

- 1,50 à trois chiffres significatifs,
- 1,5 à deux chiffres significatifs,
- 2 à un chiffre significatif.

Exemples : 1,449 s'arrondit à

- 1,45 à trois chiffres significatifs,
- 1,4 à deux chiffres significatifs,
- 1 à un chiffre significatif.

Notons qu'il faut bien réfléchir avant de procéder à des arrondis successifs dans les calculs. Par exemple, si la valeur de départ est 1,449 : si on arrondit d'abord à trois chiffres (1,449→1,45), puis qu'on arrondit à deux chiffres (1,45→1,5), on commet une erreur d'arrondis successifs puisqu'on conclut que l'arrondit à deux chiffres de 1,449 est 1,5, ce qui est faux. En effet l'arrondit à deux chiffres de 1,449 est 1,4.
On essaiera donc de n'arrondir que le résultat final d'un calcul, et d'éviter les calculs intermédiaires (d'où l'intérêt de travailler en littéral). On notera enfin qu'il faut, évidemment, *toujours calculer un chiffre de plus que le nombre de chiffres de l'arrondi souhaité* sinon il est impossible d'arrondir !
Autre erreur souvent commise : confondre arrondi et approximation. Par exemple, 0,9 est une valeur proche de 1. Mais l'arrondi à un chiffre de 0,9 est…0,9 puisque 0,9 n'a déjà qu'un seul chiffre significatif.

III Résultats des calculs numériques

On distingue les situations expérimentales directement liées à un résultat de mesurage (cf. chapitre D « Incertitudes de mesure »), et les situations formelles ou abstraites pour lesquelles on ne dispose d'aucune information quant aux incertitudes de mesure.

a) Calculs sans liens avec un résultat de mesurage

Les règles d'arrondis sont les suivantes :

- Dans les additions et soustractions, on conserve autant de *décimales* que la grandeur qui en a le moins. Exemple : 3,0 - 0,45 = 2,55, arrondi à 2,6.
- Dans les divisions et multiplications, on conserve autant de *chiffres significatifs* que la grandeur qui en a le moins. Exemple : $25,42 \times 72,5 = 1842,95$ arrondi à 184×10^1.
- Pour les grandeurs exprimées à l'aide d'un logarithme, « il y a autant de chiffres significatifs pour la valeur que de chiffres significatifs après la virgule dans son logarithme ». Exemple : si on a $\mathrm{pH} = -\log([H_3O^+]) = 8,9$, on lit que le logarithme de $[H_3O^+]$ a une décimale et on retient que la valeur de $[H_3O^+]$ s'écrit avec un seul chiffre significatif : $[H_3O^+] = 10^{-\mathrm{pH}} = 1{,}259 \times 10^{-9}$ s'arrondit à $[H_3O^+] = 1 \times 10^{-9}$.

b) Calculs liés à un résultat de mesurage

C'est l'incertitude-type du mesurage qui permet de fixer le nombre de chiffres significatifs à conserver dans l'expression de la valeur mesurée. Ce cas est traité à la section D-VI.

Chapitre C

Tests de vraisemblance

I Définition

Les tests de vraisemblance sont l'ensemble des raisonnements qualitatifs permettant d'identifier des erreurs dans le résultat d'un calcul.
Ce n'est pas parce qu'un résultat satisfait à un test de vraisemblance qu'il est juste… en revanche un résultat qui ne valide pas un test de vraisemblance est forcément faux.

II Tests d'homogénéité

On distingue trois tests d'homogénéités :

— homogénéité physique ;

— homogénéités de taille ;

— homogénéité mathématique.

L'homogénéité physique a déjà été discutée au chapitre A.
L'homogénéité de taille recouvre deux notions :

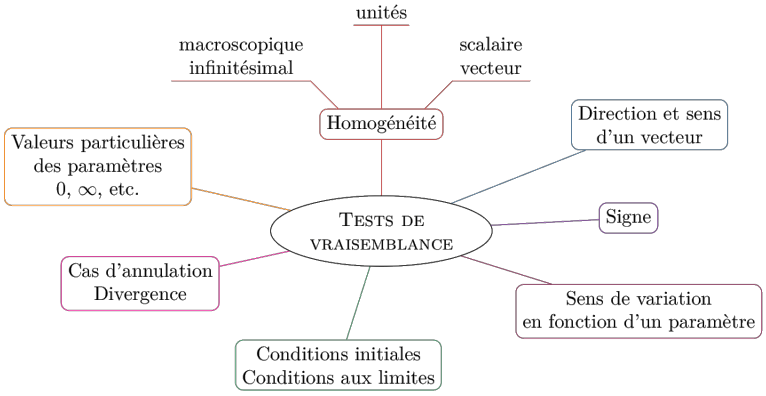
— l'homogénéité d'échelle : dans une expression tous les termes doivent être à la même échelle : l'échelle microscopique (celle des entités chimiques (atomes, ions, molécules), des électrons, etc.) ou l'échelle macroscopique (notre échelle, celle des grandes populations d'entités de l'ordre de la mole) ;

— l'homogénéité de finitude : dans une expression tous les termes doivent être soit finis, soit infinitésimaux.

L'homogénéité mathématique consiste à notre niveau à s'assurer qu'une même expression ne mélange pas des grandeurs scalaires et vectorielles.

III Autres tests

Parmi les autres tests de vraisemblance possibles, on peut lister la cohérence de signe, la compatibilité avec les conditions aux limites ou initiales, l'intuition physique, la variation attendue d'un terme en fonction d'un paramètre, etc.



IV Exemples

Exemple 1 vitesse limite d'une chute libre en présence d'une force de frottement $-\alpha\vec{v}$:

$$\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{m}{\alpha}\vec{g}$$

— la vitesse limite est colinéaire à $\vec{g}$, donc verticale vers le bas : cohérent ;

— plus les frottements sont élevés (α grand), plus la vitesse limite est faible : cohérent avec l'intuition ;

— plus l'objet est lourd (m grand), plus la vitesse limite est élevée : cohérent avec l'intuition.

Exemple 2 puissance thermique cédée à l'air par un solide de température T :

$$\mathcal{P} = G\,(T - T_{\text{air}}) \qquad \text{avec} \qquad G > 0$$

— si le solide et l'air sont à la même température, $\mathcal{P} = 0$, il n'y a pas d'échange de puissance : cohérent avec l'intuition ;

— si le solide est plus chaud que l'air, $T > T_{\text{air}}$, alors $\mathcal{P} > 0$: cohérent car le solide cède réellement de la puissance pour se refroidir ;

— plus l'écart de température $T - T_{\text{air}}$ est élevé, plus la puissance échangée est élevée : cohérent avec l'intuition.

Exemple 3 une bouteille d'eau de température initiale T_0 est placée dans un frigo de température T_{f}, sa température évolue selon :

$$T(t) = (T_0 - T_{\text{f}})\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + T_{\text{f}}$$

— à l'instant $t = 0$, on trouve $T(t = 0) = T_0$: cohérent avec la condition initiale ;

— au bout d'un temps très long $t \to \infty$, on trouve $T \to T_{\text{f}}$, la bouteille est à la même température que le frigo : cohérent avec l'intuition.

Exemple 4 le travail élémentaire d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$ s'écrit :

$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t$$

— les deux termes de l'égalité sont des termes infinitésimaux, comme l'indiquent les notations d et δ ;

— l'expression est correcte sur le plan des unités (… mais ce n'est un bon test de vraisemblance qu'à condition de savoir que $\vec{F} \cdot \vec{v}$ est une puissance).

Exemple 5 les tests de vraisemblance marchent aussi pour les calculs mathématiques :

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x/\delta}\mathrm{d}x = \left[-\delta\mathrm{e}^{-x/\delta}\right]_0^\infty = 0 + \delta = \delta$$

— l'intégrale est homogène à une longueur, à cause de $\mathrm{d}x$, donc la primitive doit elle aussi être homogène à une longueur : le coefficient δ ne peut donc qu'être au numérateur ;

— la fonction est toujours positive, donc l'intégrale doit l'être aussi.

Exemple 6 et ça vaut aussi pour les formules de trigonométrie. Dans ce cas, le test de vraisemblance consiste à tester des valeurs particulières :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

— prendre $p = q = 0$ permet de retrouver la nécessaire présence du 2 dans le terme de droite ;

— prendre $p = q = \pi/2$ permet de retrouver la nécessaire présence des /2 dans les cosinus du terme de droite, sans quoi il n'y aurait pas annulation.

Chapitre D

Incertitudes de mesures

I Introduction

I.1 Vocabulaire

— Le processus ayant pour but d'évaluer expérimentalement une grandeur physique est appelé *mesurage*. Le résultat du mesurage consiste en une valeur, ou un ensemble de valeurs, que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur. Pour comprendre le résultat du mesurage il faut préciser les conditions dans lesquelles il a été effectué (protocole, matériel, paramètres importants (température, pression,…), etc.).

— La grandeur que l'on veut mesurer, accompagnée des conditions dans lesquelles le mesurage a été effectué, est appelée le *mesurande*.

— La valeur mesurée est la valeur qu'on attribue à la grandeur mesurée à l'issue du mesurage.

— La science des mesurages et leurs applications est la *métrologie*.

I.2 Variabilité des grandeurs physiques

D'une façon générale, en sciences expérimentales, toute évaluation expérimentale d'une grandeur est toujours entaché d'une **variabilité**. Par exemple, dans le cas le plus général la répétition d'un même mesurage n'attribue pas toujours la même valeur mesurée au mesurande.
Cette variabilité a de nombreuses origines : la méthode de mesure, les variations des conditions expérimentales, les appareils de mesures utilisés, la nature même de certaines grandeurs et, bien sûr, le facteur humain, c'est-à-dire la ou les personnes réalisant le mesurage.

I.3 Histogrammes

Pour représenter graphiquement la variabilité d'une grandeur, on peut utiliser des histogrammes.
Soit une population $\{x_i\}$ de n valeurs attribuables à une même grandeur, l'idée est de ranger ces valeurs dans des *classes* (c'est-à-dire des intervalles mutuellement exclusifs de largeur donnée) et de compter le nombres de valeurs dans chaque classe.
Quelques définitions :

— étendue des observations : la valeur maximale moins la valeur minimale observée ;

— classe i : un des intervalles au sein desquels on compte le nombre d'observations ;

— l'étendue w_i d'une classe i est la largeur de l'intervalle correspondant ; toutes les classes ont en général la même étendue ;

— effectif n_i : le nombre d'observations qui se trouvent dans la classe i ;

— fréquence $f_i = \frac{n_i}{n}$: la proportion des n observations qui se trouve dans la classe i.

Un histogramme consiste à représenter sur un graphique l'effectif (ou la fréquence) de chaque classe en ordonnée et les classes en abscisse.

Avec python On utilise la fonction `hist()` de la bibliothèque de tracés de graphiques Matplotlib.
Code python disponible sur le wiki : `https://physique.mpe-charlemagne.fr`

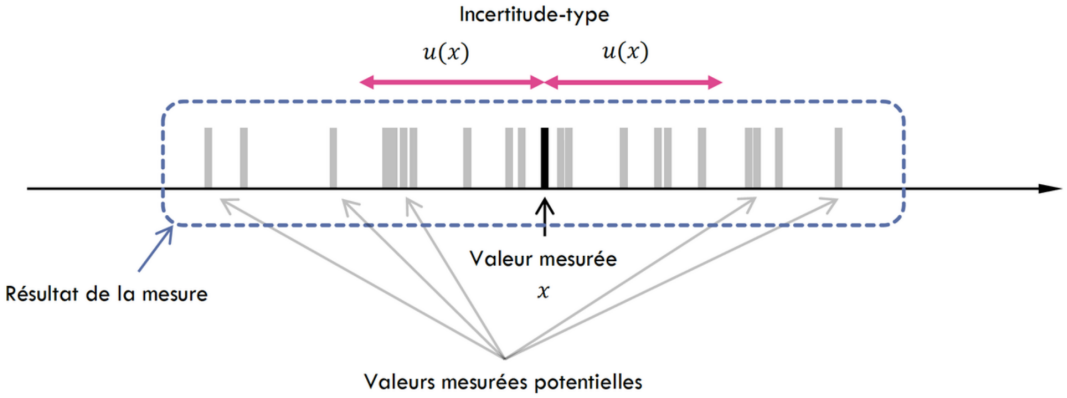
I.4 Incertitude-type

Du fait de cette variabilité, la valeur ou l'ensemble de valeurs qu'on peut attribuer à un mesurande est toujours incertain, et la façon de communiquer le résultat du mesurage doit refléter cette incertitude. L'*incertitude* est un paramètre non négatif qui caractérise la dispersion des valeurs attribuées à un mesurande. Le consensus scientifique recommande de la caractériser par un **écart-type** et on appelle alors cette caractérisation une *incertitude-type*.
Remarque : une incertitude-type est souvent notée u, d'après le mot anglais « *uncertainty* ».

Le résultat d'un mesurage n'est jamais simplement une valeur unique. Il s'agit le plus souvent d'une estimation de la valeur de la grandeur, accompagnée d'une incertitude-type caractérisant la variabilité de la grandeur mesurée ainsi que les conditions dans lesquelles il a été effectué.

Rédaction : on réalise le mesurage d'une grandeur X ; on détermine une estimation x de la valeur du mesurande associée à une incertitude-type $u(x)$ dans les conditions du mesurage. Le résultat du mesurage sera rédigé ainsi :

Mesure de X : $\boxed{(\ x\ ;\ u(x))}$ avec le matériel {…} et dans telles et telles conditions.



II Détermination de l'incertitude-type

Selon qu'on peut, ou non, observer directement la variabilité de la grandeur, il existe deux types d'évaluation de l'incertitude-type.

II.1 Variabilité observée – Type A

a) Définition

La détermination de type A d'une incertitude-type peut être effectuée lorsqu'une série de mesures est réalisée dans les mêmes conditions mais donnent des résultats variables. On la réalise grâce à une analyse statistique des valeurs obtenues.

b) Incertitude-type d'une valeur (ou écart-type échantillonnal)

Si on note $\{x_i\}$ l'ensemble des n valeurs attribuables à la grandeur, l'incertitude-type associée à une valeur quelconque x_i est :

$$\boxed{\forall i \in [\![0,\ (n-1)]\!],\ u(x_i) = \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}}\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}(x_k - \bar{x})^2}}$$

où $\bar{x}$ est la valeur moyenne de toutes les valeurs, c'est-à-dire $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_k$.
Il est important de noter que l'évaluation de l'incertitude-type se faisant grâce à l'ensemble des valeurs, elle est identique pour toutes les valeurs.

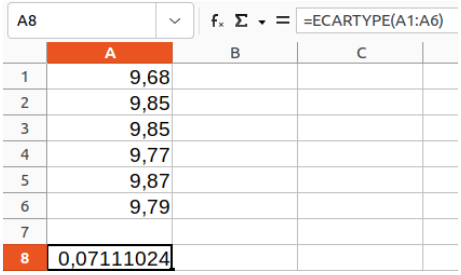
Exemple 1 On réalise $n = 6$ mesurages de la pesanteur g, dont les résultats $\{g_i\}$ sont les suivants (en $\mathrm{m\,s^{-2}}$) : 9,68 ; 9,85 ; 9,85 ; 9,77 ; 9,87 ; 9,79.

Principes du calcul On a donc, d'après ce qui précède :

$$\bar{g} = \frac{9,68 + 9,85 + 9,85 + 9,77 + 9,87 + 9,79}{6} = 9,8017\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$\forall i,\ u(g_i) = \sqrt{\frac{1}{5}}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(g_k - \bar{g})^2} = 0,0711\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

Avec un tableur $u(x_i)$ est l'écart-type expérimental ou échantillonnal ; c'est l'écart-type facilement calculé grâce à un tableur. Avec Excel, OpenOffice ou LibreOffice, la fonction à utiliser est `ECARTYPE(liste des données)`.



Avec python On utilise la fonction `std()` de la bibliothèque de calculs numériques NumPy.
Code python disponible sur le wiki : `https://physique.mpe-charlemagne.fr`

c) Incertitude-type de la valeur moyenne

Lorsqu'on dispose de plusieurs mesures indépendantes de la même grandeur, il est intéressant d'utiliser la valeur moyenne car l'incertitude-type sur la moyenne est toujours plus faible que celle sur une valeur particulière. En effet, on a :

$$\boxed{u(\bar{x}) = \frac{u(x_i)}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{n-1}}\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}(x_k - \bar{x})^2}} \tag{D.1}$$

Exemple 1 On reprend l'exemple du b). Il suffit de diviser l'écart-type échantillonnal par $\sqrt{6}$.

$$u(\bar{g}) = \frac{0,0711\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{\sqrt{6}} = 0,0290\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

Pour obtenir la racine carrée, avec Excel ou LibreOffice, la fonction à utiliser est `RACINE()`, par exemple (`RACINE(6)`) Avec python, on utilise la fonction `sqrt()` de la bibliothèque de calculs numériques NumPy, par exemple (`np.sqrt(6)`).

II.2 Absence de variabilité observée – Type B

a) Définition

Il s'agit de l'évaluation de l'incertitude-type par d'autres moyens que l'analyse statistique d'une série de mesures. En effet, dans de nombreuses situations, il n'est pas souhaitable ou pas possible de réaliser de nombreuses mesures [1] ou bien la résolution des appareils utilisés n'est pas suffisante pour que les différentes mesures donnent des valeurs différentes malgré la variabilité de la grandeur.
Une autre situation très courante en sciences est celle où on réutilise des résultats d'un autre mesurage sans avoir accès l'ensemble des mesures effectuées ni toutes les informations nécessaires à l'étude statistique.

1. Problème de temps ou de coût par exemple.

Il faut alors faire des hypothèses sur le processus de mesurage et modéliser la dispersion des valeurs raisonnablement attribuables au mesurande de façon à pouvoir simuler mathématiquement la variabilité de la grandeur. On s'appuie au maximum sur les informations diverses sur la méthode de mesure (résultats de mesures antérieures, spécifications des fabricants, notices des appareils de mesures, incertitudes fournies dans des ouvrages ou manuels, etc.) ou bien on formule des hypothèses qu'on explicite.
La détermination rigoureuse de l'incertitude-type de type B peut être très complexe et faire appel à des théories probabilistes très largement hors programme en CPGE. On se contentera donc de trois exemples qui couvrent la quasi-totalité des cas rencontrés dans l'enseignement scolaire :

— estimation grâce à un intervalle associé un modèle :
  — rectangulaire ;
  — triangulaire ;
— estimation par une loi normale (ou gaussienne).

b) Estimation grâce à un intervalle

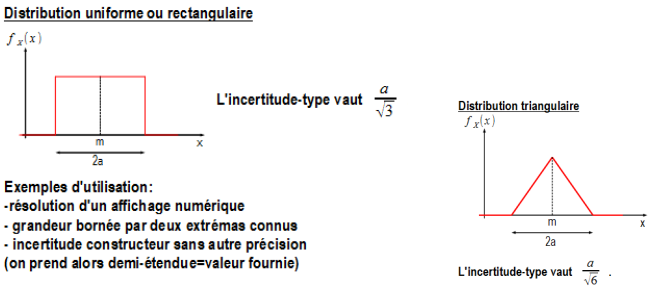


FIGURE D.1 – Distributions de densité de probabilité de présence associées aux deux modèles d'incertitudes-types de type B estimées par un intervalle.

On estime que les valeurs raisonnablement attribuables au mesurande se trouvent à l'intérieur d'un intervalle $[x_1, x_2]$ de bornes inférieure x_1 et supérieure x_2. On appelle « **étendue** » la largeur de l'intervalle $x_2 - x_1$ et « **demi-étendue** » la grandeur $\frac{x_2-x_1}{2}$. C'est le cas le plus courant, il correspond aux situations pratiques suivantes :

— on a mesuré x_1 et x_2 et on considère qu'elles sont des bornes raisonnables ou bien on a directement déterminé le minimum x_1 et le maximum x_2 des valeurs attribuables au mesurande ;
— on a mesuré une valeur x avec un appareil à affichage numérique dont la résolution est r : l'intervalle de mesure est alors $[x - \frac{r}{2}, x + \frac{r}{2}]$ et la résolution de l'appareil est égale à l'étendue ; on a $x_2 - x_1 = r$;
— on a mesuré une valeur x et on se réfère à une notice d'appareils ou à des données constructeurs qui spécifient une « précision » p sur la grandeur mesurée, sans plus explications : on considère alors la valeur p donnée comme étant la demi-étendue de la mesure ; on a $x_2 - x_1 = 2p$.

Il faut ensuite modéliser la variabilité de la grandeur.

Modèle rectangulaire Il suppose que si on réalisait de nombreuses mesures, alors les valeurs mesurées se répartiraient dans l'intervalle selon une distribution de probabilité uniforme, c'est-à-dire que toutes les valeurs de l'intervalle sont équiprobables. L'incertitude-type associée au mesurage est alors

$$\boxed{u = \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}}}$$

C'est un modèle peu pessimiste parce qu'il suppose que la seule chose qu'on peut dire est que la valeur est dans un intervalle donné. En revanche, si l'évaluation de l'intervalle est bien faite, c'est un modèle très robuste car on ne prend pas beaucoup de « risques » dans les hypothèses formulées.
Exemples :

— On mesure la position d'un trait avec une règle graduée au millimètre. Lors du mesurage, le trait est positionné entre les graduations 6 et 7. Si on estime qu'il est raisonnable de penser que n'importe quelle valeur entre les deux graduations est attribuable à la valeur mesurée de façon équiprobable, alors l'intervalle de mesure est $[x_1 = 6\,\text{mm}, x_2 = 7\,\text{mm}]$, l'étendue est égale à la valeur d'une graduation de la règle et l'incertitude-type a pour valeur $u = \frac{x_2-x_1}{2\sqrt{3}} = \frac{1\text{ graduation}}{2\sqrt{3}} = \frac{1\,\text{mm}}{2\sqrt{3}}$.

— On mesure une masse à l'aide d'une balance numérique. Le dernier chiffre de l'afficheur correspond à l'affichage des dixièmes de gramme. La résolution est donc 0,1 g. L'appareil affiche $m = 4{,}2\,\text{g}$. Compte tenu de la résolution de l'appareil, on peut juste dire que la valeur mesurée est entre $m_1 = 4{,}15\,\text{g}$ et $m_2 = 4{,}25\,\text{g}$. L'étendue est alors égale à la résolution et l'incertitude-type a pour valeur $u(m) = \frac{m_2 - m_1}{2\sqrt{3}} = \frac{0{,}1\,\text{g}}{2\sqrt{3}}$.

— On mesure une tension électrique à l'aide d'un capteur qui indique $U = 12\,\text{V}$ et dont la notice spécifie : « précision : 2 % ». On a donc une « précision » constructeur de $\frac{2}{100} \times U = 0,02 \times 12\,\text{V} = 0{,}24\,\text{V}$. On considère alors que l'intervalle de mesure est $[U_1 = 11{,}76\,\text{V},\ U_2 = 12{,}24\,\text{V}]$. La demi-étendue est alors égale à la « précision » et l'incertitude-type a pour valeur $u(U) = \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}} = \frac{0{,}24\,\text{V}}{\sqrt{3}}$.

Modèle triangulaire Dans ce cas, on considère que les valeurs vers le centre de l'intervalle sont plus probables que celles vers les bords, que la valeur centrale est la plus probable et que les valeurs aux extrémités de l'intervalle sont extrêmement improbables. L'incertitude-type associée est

$$u = \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{6}}$$

On remarque que pour une même étendue de mesure, l'incertitude-type est plus faible que dans le modèle rectangulaire. C'est donc un modèle plus optimiste mais il demande de faire des hypothèses plus nombreuses et donc d'analyser le mesurage de façon plus poussée pour s'assurer que les hypothèses sont raisonnables.
Exemples :

— On mesure la position d'un trait avec une règle graduée au centimètre. Lors du mesurage, le trait est positionné sur la graduation 8. On peut encore estimer que l'étendue est égale à la valeur d'une graduation de la règle, c'est-à-dire que l'intervalle de mesure est $[x_1 = 7{,}5\,\text{cm},\ x_2 = 8{,}5\,\text{cm}]$ mais que parmi toutes les valeurs de l'intervalle la valeur correspondant à la graduation 8 est plus probable que les autres et que les valeurs 7,5 cm et 8,5 cm sont extrêmement improbables. Si on est d'accord avec ce modèle, alors l'incertitude-type est $u = \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{6}} = \frac{1\,\text{cm}}{2\sqrt{6}}$.

  Remarque : on peut aussi conserver le modèle rectangulaire mais en supposant que l'étendue de l'intervalle est plus petite qu'une graduation parce qu'on est confiant dans le fait que les valeurs attribuables sont peu dispersées autour de la graduation. Le plus important n'est pas la valeur finale de l'incertitude-type mais plutôt de toujours expliciter le modèle qu'on a choisi de façon que les résultats soient compréhensibles.

— On mesure un volume de liquide avec une fiole jaugée de classe A sur laquelle est indiquée la mention suivante : « ±0,05 mL ». On considère souvent que l'étendue est 0,1 mL (c'est-à-dire que ce qui est indiqué est la « précision » égale à la demi-étendue). Comme il s'agit d'une verrerie de qualité (classe A), si la fiole est propre et en bon état et que la manipulation est effectuée correctement alors une modélisation triangulaire peut apparaître raisonnable, et on aura donc $u = \frac{0{,}1\,\text{mL}}{2\sqrt{6}} = \frac{0{,}05\,\text{mL}}{\sqrt{6}}$. Si on n'a pas confiance dans le matériel, ou dans la personne qui manipule, il est alors plus raisonnable de choisir une modélisation rectangulaire…

c) Estimation grâce à une loi normale (modèle gaussien)

On utilise ce modèle quand on estime que les valeurs raisonnablement attribuables à la grandeur mesurée suivent une loi normale dont on connaît l'espérance μ et la variance V.
Dans ce cas, l'incertitude-type est égale à l'écart-type de la distribution, c'est-à-dire la racine carrée de la variance : $u = \sqrt{V}$.
On réserve cette modélisation à des situations où une analyse statistique complète a déjà été menée, prouvant que la densité de probabilité des valeurs est gaussienne. Concrètement, cette analyse ne peut pas être réalisée en travaux pratiques de CPGE et on n'exploitera le modèle gaussien que lorsque l'énoncé nous demande d'admettre sa validité ou bien lorsqu'on réutilise des résultats de mesurage analysés comme étant gaussiens (publications de recherches scientifiques, certificats officiels d'étalonnage d'appareils de mesure, etc.).

Incertitude élargie, niveau de confiance Si M est la grandeur mesurée, l'*incertitude-type élargie* (notée ΔM) est une grandeur définissant un intervalle autour de l'espérance μ associé à un « niveau de confiance ». Par exemple, un niveau de confiance de 95 % signifie que si on procède de mesurages successifs indépendants réalisés dans les mêmes conditions, la probabilité d'obtenir une valeur mesurée dans l'intervalle est égale à 0,95.
Cette incertitude-type élargie est l'incertitude-type définie précédemment multipliée par un *facteur d'élargissement* k. On aura donc

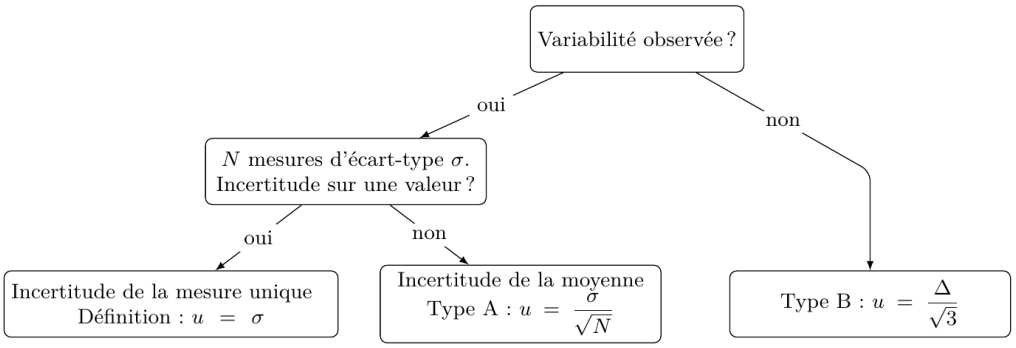
$$\boxed{\Delta M = k\,u(M)} \text{ associé à un niveau de confiance}$$

L'intervalle de confiance est alors

$$[\mu - \Delta M \ ; \ \mu + \Delta M] \text{ associé à un niveau de confiance}$$

La détermination de la valeur de k associée à un niveau de confiance peut être très compliquée et le facteur d'élargissement sera souvent donné dans l'énoncé ou accessible par une table (voir table 4) ou calculé grâce à un logiciel.
On peut néanmoins retenir que, dans un grand nombre de situations expérimentales rencontrées dans de nombreux domaines, la valeur $k = 2$ est associée à un niveau de confiance de 95 %.

II.3 Schématisation du choix de la méthode d'estimation de l'incertitude



où $\sigma = u(x_i)$ est l'écart-type échantillonnal et $\Delta = \frac{x_2 - x_1}{2}$ est la demi-étendue.

III Détermination de la valeur mesurée

III.1 Définition

À la fin du processus de mesurage, en plus de l'incertitude-type, on peut déterminer la valeur mesurée, c'est-à-dire la valeur attribuable au mesurande dont on estime qu'elle représente bien la grandeur mesurée dans les conditions de l'expérience.

III.2 Estimateurs

Si on dispose de plusieurs valeurs alors le meilleur estimateur de la valeur mesurée est la valeur moyenne de ces valeurs, c'est-à-dire

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} x_i}{n}}$$

Si on dispose d'un intervalle de mesure alors un très bon estimateur de la valeur mesurée est la valeur centrale de l'intervalle, c'est-à-dire la moyenne des bornes de l'intervalle, donc pour l'intervalle $[x_1 \, ; \, x_2]$:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_2 - x_1}{2}}$$

Si les valeurs suivent une loi normale d'espérance μ alors le meilleur estimateur est l'espérance et $\bar{x} = \mu$.

Exemple 1 On reprend l'exemple de la section sur les incertitudes de type A. Le meilleur estimateur est la moyenne $\bar{g} = 9{,}8017\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

IV Incertitude-type composée

Lorsque que la valeur d'une grandeur G est déterminée indirectement grâce à des mesures de plusieurs autres grandeurs, l'incertitude-type sur le mesurande G dépend des incertitudes-types sur les autres grandeurs. On parle de *propagation des incertitudes* et les grandeurs ayant servi à déterminer G sont appelées *grandeurs d'influence* ou *grandeurs d'entrée*.
Dans les cas où les grandeurs sont additionnées, soustraites, multipliées ou divisées, les résultats ci-dessous sont admis et doivent être connus. Dans un cas général plus complexe, un logiciel sera utilisé et seul le principe du calcul doit être compris.

IV.1 Combinaison linéaire

Soit $G = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2$, avec E_1 et E_2 les grandeurs d'entrée et α_1 et α_2 deux constantes[1] réelles quelconques. L'incertitude-type composée sur G, notée $u_c(G)$ est donnée par :

$$\boxed{u_c(G) = \sqrt{\left(\alpha_1 u(E_1)\right)^2 + \left(\alpha_2 u(E_2)\right)^2}}$$

IV.2 Produits et quotients

Soit $G = aE_1^{\alpha_1}E_2^{\alpha_2}$, avec a une constante réelle non-nulle et α_1 et α_2 deux constantes réelles quelconques. L'incertitude-type composée sur G, notée $u_c(G)$ est donnée par :

$$\boxed{u_c(G) = |G| \sqrt{\left(\alpha_1 \frac{u(E_1)}{E_1}\right)^2 + \left(\alpha_2 \frac{u(E_2)}{E_2}\right)^2}}$$

IV.3 Autres situations

Quand la relation entre le mesurande et les grandeurs d'entrée ne peut pas être mise sous une des formes précédentes, les propagations d'incertitudes deviennent extrêmement compliquées. Dans ce cas, on n'utilise plus de formule de propagation d'incertitudes mais des algorithmes qui permettent de simuler l'effet de la variabilité des grandeurs d'entrée sur la variabilité de la grandeur de sortie. En CPGE, on utilise la méthode de Monte Carlo qui consiste à simuler des valeurs aléatoires des grandeurs d'entrée cohérentes avec leurs étendues et incertitudes-types puis à en déduire la variabilité du mesurande recherchée.
Cette méthode sera détaillée plus tard dans le cours.

IV.4 Comparaison des contributions à la variance

Soit G une grandeur déterminée indirectement grâce aux mesurages de deux grandeurs d'entrée E_1 et E_2. Pour évaluer la contribution de chacune des grandeurs d'entrée à la variance de G, on identifie les coefficients C_1 et C_2 tels que

$$u_c^2(G) = C_1^2 u^2(E_1) + C_2^2 u^2(E_2)$$

La contribution à la variance de E_1 est alors le rapport suivant :

$$\mathcal{C}_V(E_1) = \frac{C_1^2 u^2(E_1)}{u_c^2(G)}$$

Celle de E_2 :

$$\mathcal{C}_V(E_2) = \frac{C_2^2 u^2(E_2)}{u_c^2(G)}$$

On exprime généralement ces contributions par un pourcentage et, bien sûr, $\mathcal{C}_V(E_1) + \mathcal{C}_V(E_2) = 100\,\%$.
Il n'est pas difficile de généraliser la discussion aux cas où plus de deux grandeurs d'influence sont en jeu.

1. Il faut ici comprendre le terme « constante » comme un nombre dont la variabilité est nulle ou tellement faible qu'on peut la négliger devant la variabilité des autres grandeurs de l'expression.

IV.5 Exemple

Exemple 2 On mesure aux bornes d'un résistor de résistance R inconnue une tension $U = 1{,}00\,\mathrm{V}$ avec une incertitude-type $u(U) = 0{,}06\,\mathrm{V}$ et une intensité de courant électrique $I = 1{,}057 \times 10^{-4}\,\mathrm{A}$ avec une incertitude-type $u(I) = 0{,}0003\,\mathrm{mA}$. Pour déterminer R on suppose vérifiée la relation $R = \frac{U}{I}$. Les grandeurs d'influence sont donc U et I et les incertitudes-types sur leurs mesures respectives permettent de déterminer l'incertitude-type composée sur R. On a :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1{,}00\,\mathrm{V}}{1{,}057 \times 10^{-4}\,\mathrm{A}} = 9460{,}737\,938\,\Omega = 9{,}461\,\mathrm{k\Omega}$$

et

$$u_c(R) = R\sqrt{\left(\frac{u(U)}{U}\right)^2 + \left(\frac{u(I)}{I}\right)^2}$$

ce qui donne une incertitude-type composée

$$u_c(R) = 9{,}4607\,\mathrm{k\Omega} \times \sqrt{\left(\frac{0{,}06\,\mathrm{V}}{1{,}00\,\mathrm{V}}\right)^2 + \left(\frac{3 \times 10^{-7}\,\mathrm{A}}{1{,}057 \times 10^{-4}\,\mathrm{A}}\right)^2} = 568{,}28\,\Omega$$

Bien entendu, le nombre de chiffres significatifs est irréaliste et, dans la présentation des résultats, il conviendra d'appliquer des règles d'arrondis qui seront vues en détails à la section VI « Écriture des résultats du mesurage ».

Pour évaluer les influences respectives de U et I dans la variance de R, on remarque que

$$u_c^2(R) = \frac{R^2}{U^2}u^2(U) + \frac{R^2}{I^2}u^2(I)$$

ce qui permet d'identifier les contributions à la variance de U

$$\mathcal{C}_V(U) = \frac{R^2}{U^2}\frac{u^2(U)}{u_c^2(R)} = \left(\frac{9{,}461 \times 10^3\,\Omega}{1{,}00\,\mathrm{V}}\frac{0{,}06\,\mathrm{V}}{568{,}28\,\Omega}\right)^2 = 99{,}78\,\%$$

et de I

$$\mathcal{C}_V(I) = \frac{R^2}{I^2}\frac{u^2(I)}{u_c^2(R)} = \left(\frac{9{,}461 \times 10^3\,\Omega}{1{,}057 \times 10^{-4}\,\mathrm{A}}\frac{0{,}0003 \times 10^{-3}\,\mathrm{A}}{568{,}28\,\Omega}\right)^2 = 0{,}22\,\%$$

Ainsi, dans notre exemple, la quasi-totalité de la variabilité de la résistance est due à la variabilité de la tension. Pour améliorer le processus de mesurage et réduire l'incertitude-type sur la résistance, les efforts doivent en priorité porter sur la façon dont est mesurée la tension.

V Compatibilité de deux valeurs

V.1 Écart normalisé ou z-score

Il est parfois utile de comparer deux valeurs d'une même grandeur mesurées par des techniques ou des personnes différentes. Il est nécessaire pour cela d'utiliser un critère quantitatif permettant de répondre à la question « les deux valeurs mesurées sont-elles compatibles entre elles ? ». Il s'agit en fait de déterminer si l'écart entre les deux valeurs mesurées peut raisonnablement s'expliquer par la variabilité des grandeurs physiques : si l'écart est trop important par rapport aux incertitudes-types, on est amené à rejeter l'hypothèse que les résultats sont compatibles entre eux.
On utilise comme critère l'**écart normalisé** Z. Soient deux résultats de mesures de la même grandeur, $x_1; u(x_1)$ et $x_2; u(x_2)$, leur écart normalisé est :

$$\boxed{Z(x_1, x_2) = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}} \tag{D.2}$$

Du fait de sa notation, l'écart normalisé est aussi parfois appelé « **z-score** ».

V.2 Compatibilité entre deux valeurs mesurées

On retient comme critère de compatibilité une valeur de l'écart normalisé inférieure à 2.
Si $Z \gtrsim 2$, on rejette a priori l'hypothèse de compatibilité et les deux mesures sont déclarées incompatibles.

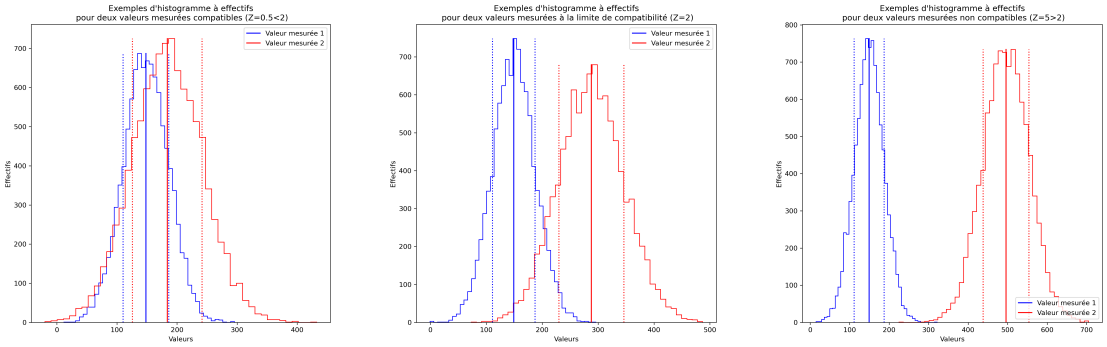


FIGURE D.2 – Visualisations à l'aide d'histogramme de comparaisons entre valeurs mesurées. On a représenté les histogrammes, les valeurs moyennes ainsi que les limites des intervalles à plus ou moins un écart-type.
À gauche : valeurs compatibles ($Z < 2$). Au centre : valeurs à la limite de compatibilité ($Z = 2$). À droite : valeurs non compatibles ($Z > 2$).

V.3 Compatibilité entre une valeur mesurée et une valeur de référence

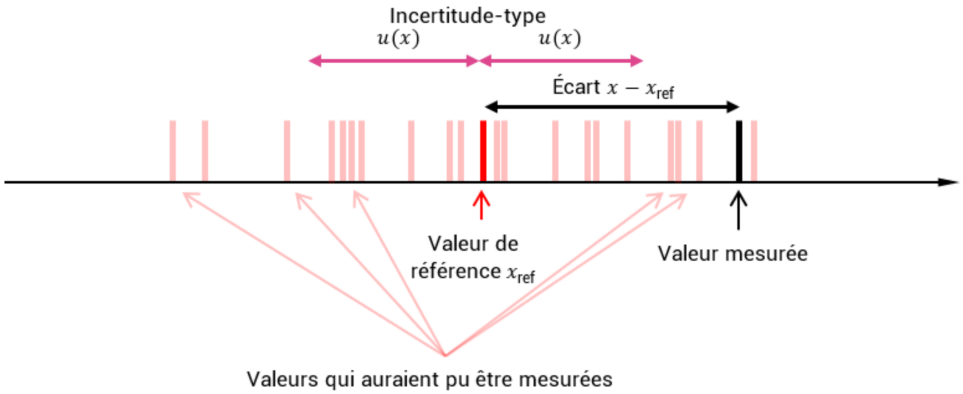
Parfois, on est amené à évaluer la compatibilité d'une valeur mesurée avec une valeur de référence, c'est-à-dire une valeur dont l'incertitude est supposée très faible comparée celle de la valeur mesurée qu'on cherche à commenter. La valeur de référence peut par exemple être :

- issue d'une publication scientifique suite à une manipulation de très grande précision ;
- déterminée grâce à un modèle dont on connaît très bien les paramètres ;
- une valeur conventionnelle admise par la communauté scientifique comme c'est le cas pour les constantes fondamentales du système international d'unité, dont les valeurs sont supposées exactes, ou les autres constantes de la physique.

Soit x la valeur mesurée à commenter et x_{ref} la valeur de référence. Comme on suppose que $u(x_{ref}) \ll u(x)$, l'expression D.2 de l'écart normalisé devient :

$$\boxed{Z(x, x_{ref}) \approx \frac{|x - x_{ref}|}{\sqrt{u(x)^2}} = \frac{|x - x_{ref}|}{|u(x)|}} \tag{D.3}$$

Là encore, on retient comme critère de compatibilité une valeur de l'écart normalisé inférieure à 2. Si $Z \gtrsim 2$, on rejette a priori l'hypothèse de compatibilité.



V.4 Analyses des incompatibilités

Si l'écart normalisé est inférieur à 2, alors les valeurs sont compatibles entre elles. Si ce n'est pas le cas, il faut essayer de comprendre pourquoi. Il y a plusieurs pistes de réflexion :

— les valeurs n'ont peut-être pas été obtenues dans des conditions suffisamment proches : il faut réfléchir aux processus de mesurage ;

— le modèle auquel on compare la valeur mesurée est peut-être à revoir ;

— les incertitudes-types des valeurs comparées ont peut-être été sous-estimées, rendant l'écart normalisé artificiellement élevé.

VI Écriture des résultats du mesurage

Une fois l'incertitude-type[1] et la valeur mesurée déterminés, on peut écrire le résultat du mesurage. **On doit s'appuyer sur l'incertitude-type[1] pour déterminer le bon nombre de chiffres significatifs de la valeur mesurée**. Règles sur les chiffres significatifs :

— On écrit l'incertitude-type[1] avec deux chiffres significatifs.

— On écrit la valeur mesurée et l'incertitude-type[1] en utilisant la même unité et, le cas échéant, la même puissance de 10.

— On identifie la valeur qu'aurait un chiffre 1 placé en dernière position dans l'écriture de l'incertitude-type[1].

— On arrondit la valeur mesurée de façon qu'un chiffre 1 placé en dernière position dans son écriture ait la même valeur que celle décrite à l'étape précédente.

Le résultat s'écrit :

$$x = (\bar{x}\ ;\ u(x))\ \textbf{unités}$$

Exemple 1 On reprend l'exemple des mesures de pesanteur. On a obtenu : une valeur mesurée $\bar{g} = 9{,}8017\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, une incertitude-type $u(\bar{g}) = 0{,}0290\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. On commence par arrondir l'incertitude-type à deux chiffres : $u(\bar{g}) = 0{,}029\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Les deux grandeurs sont bien écrites dans la même unité avec la même puissance de dix. Le dernier chiffre de l'incertitude-type est en position des millièmes de $\mathrm{m\,s^{-2}}$. On arrondit donc la valeur mesurée pour que son dernier chiffre soit également en position des millièmes de $\mathrm{m\,s^{-2}}$. Cela donne $\bar{g} = 9{,}802\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Le résultat du mesurage s'écrit :

$$g = (9,802\ ;\ 0,029)\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Exemple 2 On reprend l'exemple de la mesure de résistance. On a obtenu : une valeur mesurée $R = 9{,}461\,\mathrm{k\Omega}$, une incertitude-type $u(R) = 568\,\Omega$. On l'arrondit à deux chiffres : $u(R) = 57 \times 10^1\,\Omega$. On réécrit cette incertitude-type avec la même unité et la même puissance de 10 que la valeur mesurée, c'est-à-dire $u(R) = 0{,}57\,\mathrm{k\Omega}$. Le dernier chiffre de cette incertitude-type porte sur les centièmes de kΩ. On arrondit donc R en conséquence : $R = 9{,}46\,\mathrm{k\Omega}$. Le résultat du mesurage s'écrit :

$$R = (9,46\ ;\ 0,57)\ \mathrm{k\Omega}$$

On aurait pu aussi choisir d'écrire toutes les grandeurs en ohms. On aurait alors eu :

$$R = (9,46\ ;\ 0,57) \times 10^3\ \Omega$$

1. Ou l'incertitude-type élargie associée à un niveau de confiance dans le cas de la modélisation gaussienne.

Chapitre E

Travaux pratiques et activités expérimentales

I Introduction

Vos fascicules et énoncés de TP sont explicites et détaillés. Il est impossible en Classe préparatoire de distinguer les TP du Cours. En Chimie comme en Physique, *des parties entières du programme ne seront abordées qu'à travers les TP*. Faire l'impasse sur ces derniers constitue donc une grave erreur, que ce soit pour les écrits ou pour l'oral du concours. Lisez les énoncés et **travaillez-les entièrement impérativement avant la séance**. Un certain nombre de questions théoriques sont posées *tout au long de l'énoncé* de manière à ce que vous puissiez profiter pleinement des séances : **ces questions doivent absolument être traitées avant la séance**. Dans le cas contraire, vous n'aurez pas le temps de terminer ni de vous assurer que vous avez correctement mené vos expériences, d'autant plus que beaucoup de ces TP sont longs. Une vérification des préparations sera effectuée au début de chaque séance.

II Le cahier de laboratoire

Il s'agit d'une pochette ou d'un classeur personnel, format A4, à conserver jusqu'au concours et dans lequel :

- on archive l'ensemble des énoncés de TP, les notices, les courbes imprimées,
- on note tous les résultats expérimentaux obtenus (tableaux de valeurs, mesures, conclusions) ainsi que toutes les informations utiles pour retrouver ces résultats expérimentaux (formules, schémas de montage, conditions expérimentales),
- on rédige les parties théoriques qui correspondent au travail expérimental ainsi que le cours dispensé au tableau par le professeur pendant la séance de TP.

III Les comptes-rendus

Un certain nombre de TP donneront lieu à la rédaction d'un compte-rendu noté.

III.1 Rédaction

Concernant la rédaction, d'une manière générale, **la concision**, **la clarté** de la rédaction (forme et fond), la correction du français utilisé (dont l'**orthographe**) feront partie de la notation. Il est inutile de recopier l'énoncé de TP ! Contentez-vous de répondre clairement aux questions posées. Dans le même ordre d'idée, limitez l'emploi d'applications informatiques au strict nécessaire : mal maîtrisées, elles conduisent à des comptes rendus catastrophiques.
Pensez toujours à numéroter vos réponses sur votre copie, exactement de la même façon que les questions le sont dans l'énoncé, en répétant toutes les numérotations.

IV Les graphiques

Vous devez particulièrement les soigner. Un compte-rendu **ne peut pas avoir la moyenne** si ses graphiques ne respectent pas les prescriptions suivantes :

— si la courbe est manuelle, utilisation de **papier millimétré** ou semi-log pour toutes les courbes expérimentales.

Dans tous les cas :

— **tableau** résumant les valeurs reportées sur le graphique, avec leurs unités, donné sur (ou au verso de) la feuille utilisée,

— **axes** tracés à la règle et portant les noms des grandeurs représentées et leurs unités,

— **échelle** rappelant la conversion unité de longueur sur le graphique – unité de mesure,

— **titre** identifiant l'expérience qui a été menée ou explicitant la courbe représentée.

Il est de plus absolument nécessaire **d'exploiter les renseignements expérimentaux fournis par les graphiques**. Par exemple, il est intéressant de fournir avec le graphique :

— la **paramètres** des modèles utilisés ou ajustés,

— les **barres d'incertitudes expérimentales** si on les connaît,

— les **asymptotes** des courbes et leurs pentes,

— les **tangentes** à l'origine et leurs pentes,

— les **points particuliers** (maximum, minimum, point d'inflexion, volume équivalent de dosage, fréquence de coupure etc.),

— les **valeurs remarquables** (intersection avec les axes par exemple).

À ces considérations générales s'ajoutent :

— une utilisation maximale de la surface de la feuille utilisée, pour la lisibilité ; ceci suppose notamment une réflexion sur la **partie utile** de vos mesures…

— si vous avez plusieurs courbes sur un même graphique ajoutez une **légende** identifiant chacune des courbes,

— si vous trouvez que les valeurs numériques ne sont pas faciles à écrire sur vos axes, ou dans vos tableaux, utilisez des divisions ou des multiples de l'unité ; dans le cas où l'unité est imposée, ou sans divisions ou multiples connus, procédez comme dans l'exemple qui suit,

— si une courbe manuelle est demandée, vous ne pouvez pas la remplacer par une courbe tracée informatiquement.

Pour un exemple, reportez-vous à la figure E.1.

V Tableau de valeurs numériques

Si vos données sont les suivantes :

I (A)	0,00011	0,00012	0,00009
U (V)	0,002	0,003	0,001

Il est parfois commode de les réécrire afin de ne pas surcharger le tableau avec des zéros n'apportant aucune information. Il y a deux solutions : un changement d'unité d'expression (mV au lieu de V par exemple) ou la multiplication de la grandeur par une puissance de 10 adéquate. Par exemple si

$$I = 0{,}000\,11\,\text{A} = 11 \times 10^{-5}\,\text{A}$$

alors

$$10^{+5} \times I = 11\,\text{A}$$

Vous pouvez alors remplacez les grandeurs du tableau précédent par :

$10^{+5} \times I$ (A)	11	12	9
U (mV)	2	3	1

La grandeur sur l'axe est alors $10^{+5} \times I$ exprimée en ampères.

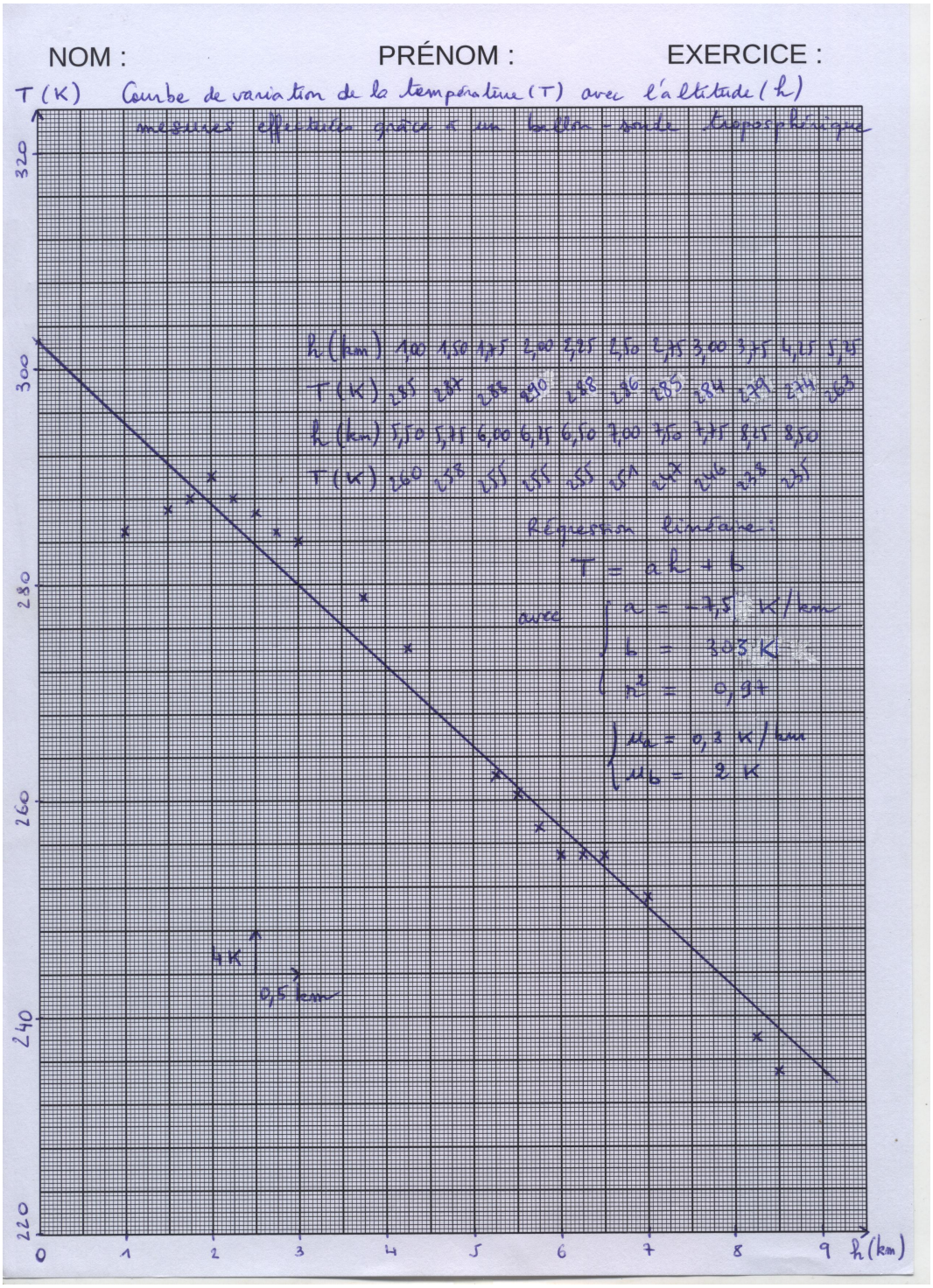


FIGURE E.1 – 1.Titre explicite décrivant la courbe, 2. axes orientés avec mention de la grandeur sur l'axe et le cas échéant son unité, 3. échelle numérique avec les unités, 4. tableau de valeurs complet avec les unités : ce tableau peut être placé au dos de la courbe, 5. points repérés de façon visible, 6. graduations sur les axes et valeurs intermédiaires pour faciliter la lecture, 7. calculs importants effectués en relation avec la courbe : ici pente et ordonnée à l'origine issues d'une régression linéaire, 8. incertitudes-types sur la pente et l'ordonnée à l'origine, 9. courbe moyenne tracée en relation avec l'allure attendue : ici on s'attend à une droite, on trace donc la droite la plus proche possible de tous les points (on peut, dans notre exemple, utiliser l'équation donnée par la régression linéaire).

Chapitre E

Ajustements de modèles et comparaisons aux mesures

I Introduction

On distingue principalement deux types d'études expérimentales de modèles, qui parfois se complètent :

— si on ne connaît pas les paramètres du modèle, on réalise un **ajustement** pour déterminer les valeurs des paramètres du modèle qui mènent aux prévisions les plus proches possibles des valeurs mesurées ;

— une fois le modèle paramétré, on étudie sa **compatibilité** avec les mesures.

II Ajustements de modèles

Un ajustement de modèle consiste à déterminer les valeurs des paramètres du modèle qui mènent aux prévisions les plus proches possibles des valeurs mesures. Les algorithmes d'ajustement sont très nombreux et parfois extrêmement compliqués, il ne s'agit pas de les étudier mais uniquement de les utiliser. À titre culturel, on peut néanmoins citer l'ajustement par la méthode des moindres carrés [1], d'importance historique et encore très largement utilisé.

II.1 Ajustements linéaires

Si on suppose que la relation entre les grandeurs y et x est de la forme $y = px$ c'est-à-dire une relation linéaire, p est le seul paramètre du modèle. L'ajustement consiste à déterminer grâce aux valeurs mesurées $\{x_i\}$ et $\{y_i\}$ la meilleure estimation expérimentale de p qu'on pourra noter $\bar{p}$.

a) Méthode 1

Étant donné que le modèle suppose $\forall x \neq 0$, $p = \frac{y}{x}$, il suffit dans ce cas de déterminer toutes les valeurs $p_i = \frac{y_i}{x_i}$ pour $x_i \neq 0$ puis d'en faire la moyenne. Si on dipose de n mesures, on aura alors

$$\boxed{\bar{p} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} p_i}{n} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i}{x_i}}{n}}$$

Ces calculs se réalisent facilement avec un tableur ou avec python.

b) Méthode 2

On peut effectuer une régression linéaire, qui ajuste par la méthode moindres carrés la meilleure estimation de la valeur de la pente compte tenu des données expérimentales.

1. https://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_des_moindres_carrés

Avec un tableur Avec Excel ou LibreOffice, la fonction à utiliser est `DROITEREG`. La façon pratique d'utiliser cette fonction est détaillée sur une feuille de calcul disponible sur le wiki de la physique. On se contente ici de donner les syntaxes utiles pour une régression linéaire :

```
DROITEREG(donnéesY ; donnéesX ; 0 ; 1)
```

Il n'y a pas de fonctions python simples permettant de réaliser l'équivalent de cette régression linéaire.

II.2 Ajustements affines

Une régression affine est un ajustement pour lequel on suppose que la relation entre les grandeurs y et x est de la forme $y = px + b$ c'est-à-dire un polynôme d'ordre 1. p et b sont les paramètres du modèle. L'ajustement consiste à déterminer grâce aux valeurs mesurées $\{x_i\}$ et $\{y_i\}$ les meilleures estimations expérimentales de p et b, qu'on pourra noter $\bar{p}$ et $\bar{b}$. Attention, la plupart du temps, les notices, logiciels, livres, etc. appellent par abus de langage ce type d'ajustement « régression linéaire »… bien qu'il s'agisse d'un ajustement affine.

Avec un tableur Avec Excel ou LibreOffice, la fonction à utiliser est `DROITEREG`. La façon pratique d'utiliser cette fonction est détaillée sur une feuille de calcul disponible sur le wiki de la physique. On se contente ici de donner les syntaxes utiles pour une régression affine :

```
DROITEREG(donnéesY ; donnéesX ; 1 ; 1)
```

Remarque : on peut également obtenir des données similaires à partir d'une courbe, en ajoutant une « courbe de tendance » mais on n'a alors pas accès à tous les résultats statistiques utiles.

Avec python Pour obtenir une régression affine, on utilise la fonction `polyfit()` de la bibliothèque de calculs numériques NumPy.

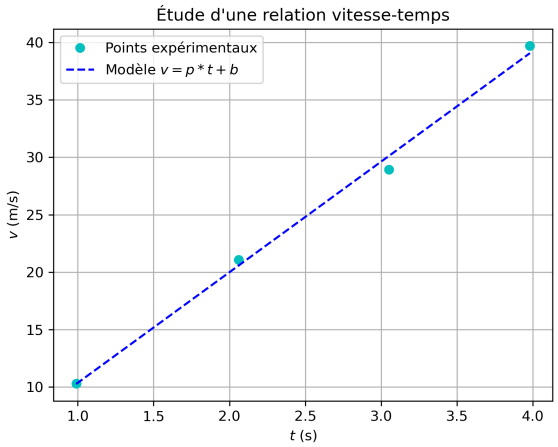


FIGURE E.1 – Une courbe expérimentale et une possibilité de modèle des données expérimentales ajusté par régression affine.

II.3 Autres ajustements

D'autres types d'ajustements qu'affines ou linéaires sont bien entendu possibles. Notamment, il est possible de faire des ajustements avec des polynômes de n'importe quel ordre grâce à la fonction `polyfit()` de bibliothèque de calculs numériques NumPy.
Des ajustements avec des fonctions quelconques peuvent être obtenus grâce à la fonction `curve_fit()` de la bibliothèque scientifique SciPy Optimize.

III Comparaison modèles-mesures

Une fois qu'on dispose d'un modèle paramétré, il faut évaluer sa compatibilité avec les mesures. Deux outils permettent d'étudier graphiquement cette compatibilité :

— les barres d'incertitudes ;

— les résidus normalisés.

III.1 Barres d'incertitudes

Pour une valeur mesurée y_i, les barres d'incertitudes sont la représentation graphique des intervalles $[y_i - 2u(y_i); y_i + 2u(y_i)]$, c'est-à-dire des segments de longueurs $4u(y_i)$ centrées sur y_i. On trace ensuite la courbe des valeurs mesurées munis de ces barres : cela permet de visualiser la variabilité des valeurs mesurées et de préparer une éventuelle comparaison avec un modèle. (voir figure E.2).

Avec un tableur On cherche dans les options d'édition de la courbe, la possibilité d'ajouter des « barres d'erreur Y ». Un certain nombres d'options sont ensuite proposées, qui seront travaillées en TD et TP.

Avec python On utilise la fonction `errorbar()` de la bibliothèque de tracés de graphiques Matplotlib.

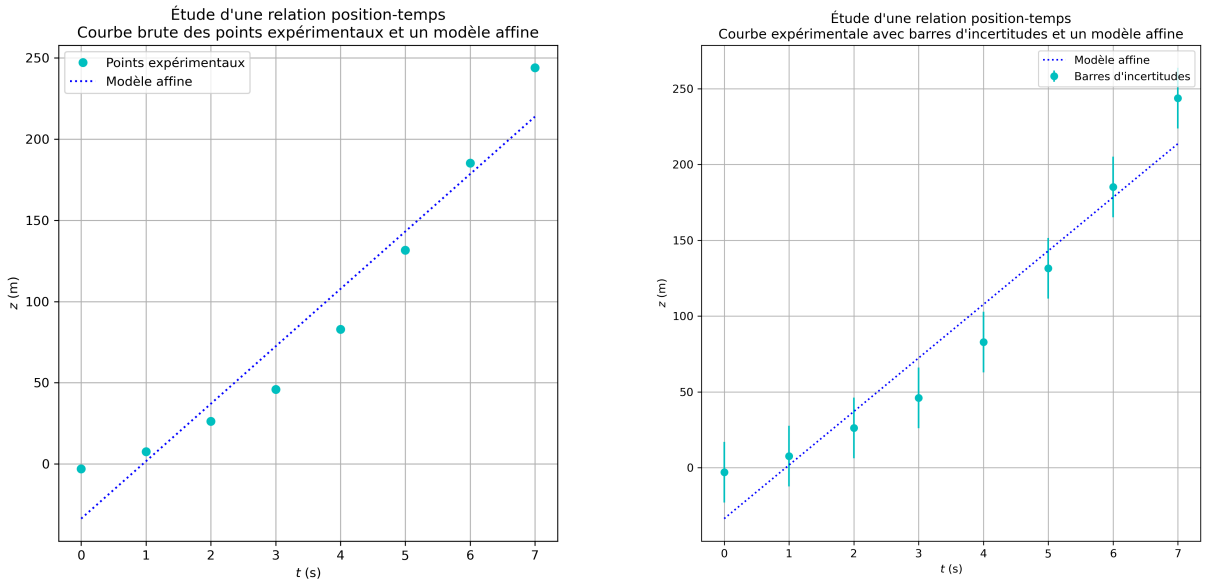


FIGURE E.2 – Une courbe expérimentale sans barre d'incertitude ne permet pas visualiser la variabilité des valeurs mesurées. Pour cela, on ajoute dès qu'on le peut des barres d'incertitudes. Elles permettent également de préparer une éventuelle comparaison avec un modèle.

III.2 Résidus normalisés

On suppose qu'on dispose d'un modèle paramétré (issu directement d'une théorie ou bien obtenu par ajustement), reliant deux grandeurs, par exemple ($y = f(x)$). Pour chaque valeur mesurée x_i, on peut déterminer une valeur $y_{mod,i} = f(x_i)$ qui est la valeur de y prévue par le modèle quand x vaut x_i. Les écarts entre les mesures y_i et les prévisions du modèle $y_{mod,i}$ sont appelés les **résidus** :

$$\forall i,\ \mathrm{res}(x_i) = y_i - y_{mod,i} = y_i - f(x_i)$$

En divisant les résidus par les incertitudes-types sur les valeurs de y_i, on obtient les résidus normalisés :

$$\boxed{\forall i,\ \mathrm{res}_{norm}(x_i) = \frac{y_i - f(x_i)}{u(y_i)}} \tag{E.1}$$

Remarque : Le concept de résidus normalisés est très proche de celui des écarts normalisés vus au chapitre D. On fait tout de même attention au fait que les résidus normalisés peuvent être positifs ou négatifs, alors que les écarts normalisés sont définis positifs via une valeur absolue au numérateur.
On peut ensuite tracer une représentation graphique des résidus normalisés mesurés. Généralement, on munit également chaque point de cette courbe de *barres d'incertitudes normalisées* : ce sont les barres d'incertitudes des valeurs divisées par l'incertitude-type. Concrètement, les barres d'incertitudes normalisées sont donc la représentation graphique des intervalles $[\mathrm{res}_{norm}(x_i)-2\ ;\ \mathrm{res}_{norm}(x_i)+2] = [\frac{y_i-f(x_i)}{u(y_i)}-2\ ;\ \frac{y_i-f(x_i)}{u(y_i)}+2]$. L'intérêt des résidus et barres d'incertitudes normalisés est qu'ils rendent plus facile visuellement la détermination de la compatibilité modèle-mesures qu'avec une simple courbe expérimentale avec barre d'incertitudes.

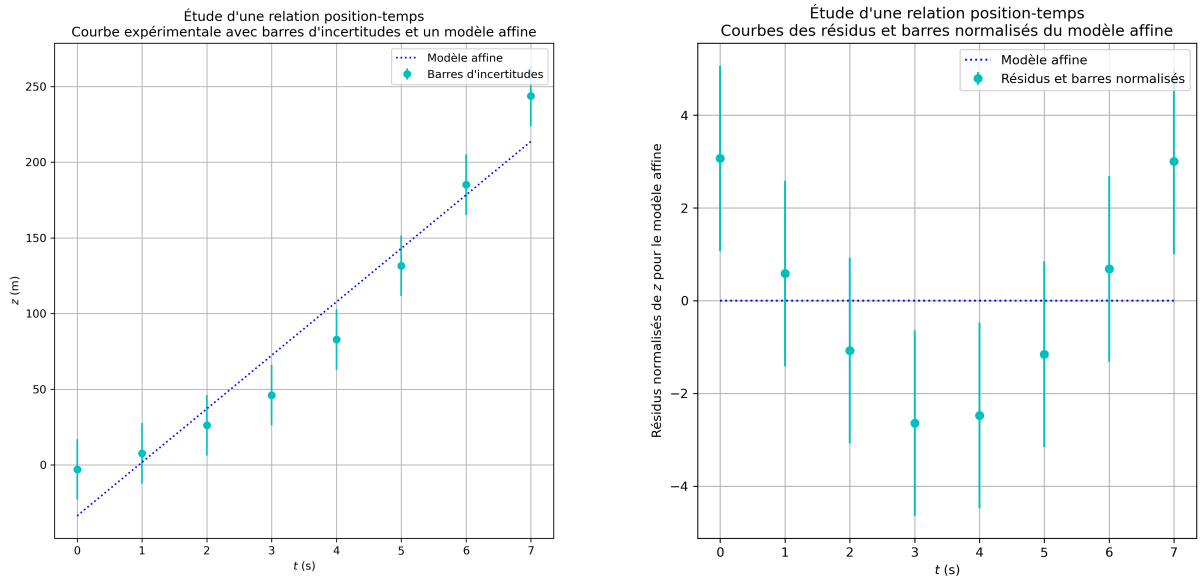


FIGURE E.3 – Une courbe expérimentale, avec une modélisation possible des mesures (à gauche). Les résidus normalisés accompagnées de leurs barres d'incertitudes normalisées (c'est-à-dire des segments de longueurs 2 au dessus et en dessous de chaque point (à droite). Les résidus étant calculés grâce aux écarts entre les prévisions du modèle et les mesures, un accord « parfait » entre les deux donnerait des résidus tous nuls.

III.3 Détermination de la compatibilité (ou non-compatibilité)

Une fois qu'on a tracé la courbe expérimentale munie de ses barres d'incertitudes et tracé les résidus normalisés de leurs barres d'incertitudes normalisés, on peut comparer le modèle aux mesures. Le critère de compatibilité est très simple et est analogue à celui utilisé pour la comparaison de deux valeurs :

> Un modèle est compatible avec les mesures si la courbe du modèle passe par les barres d'incertitudes expérimentales. De façon équivalente, un modèle est compatible avec les mesures si l'axe des abscisses passe par les barres d'incertitudes normalisées des résidus normalisés.
> Dans tous les autres cas, le modèle n'est pas compatible avec les données expérimentales.

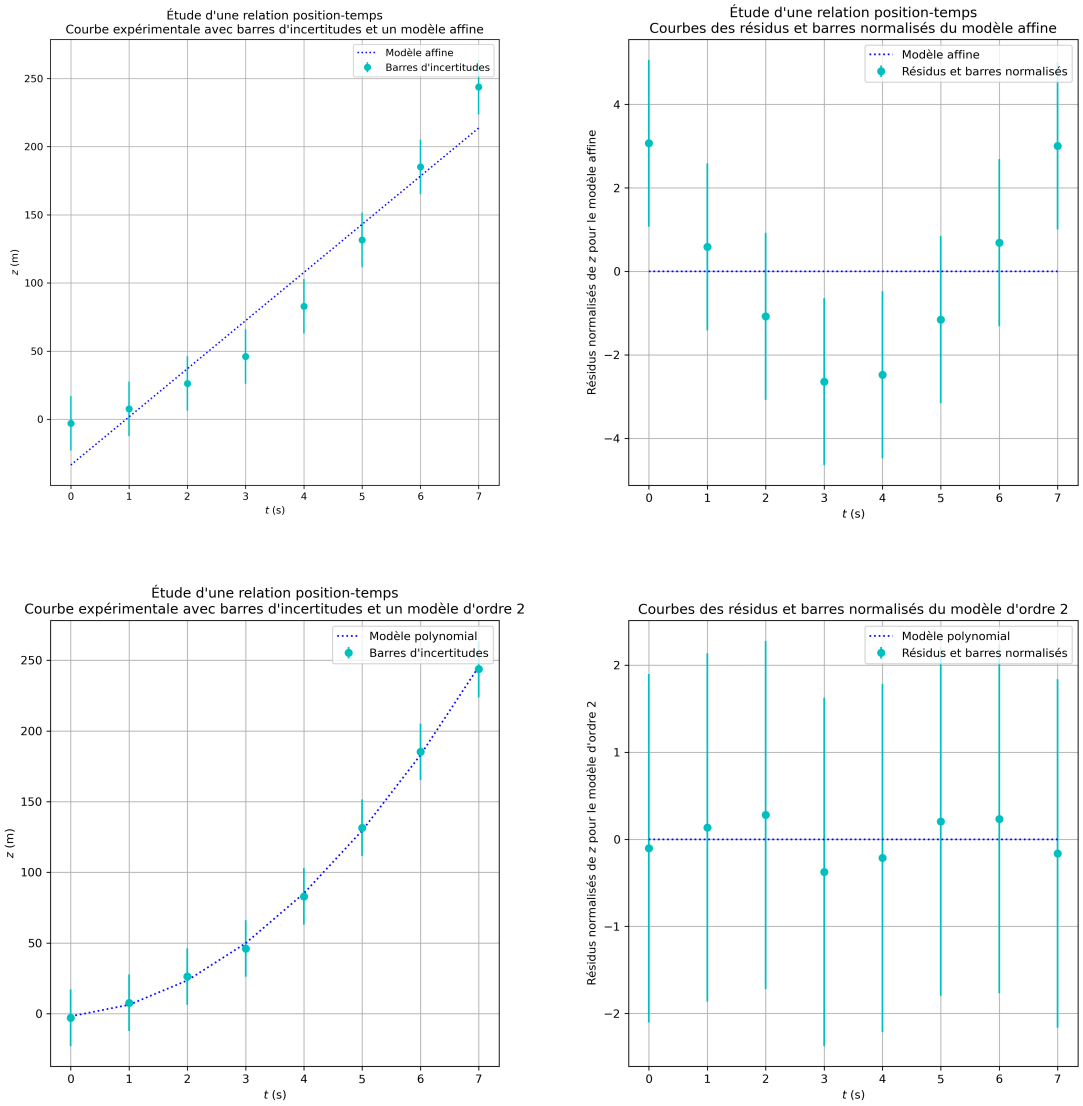


FIGURE E.4 – En haut : le modèle affine n'est pas compatible avec les données expérimentales. En bas : le modèle polynomial d'ordre deux est compatible avec les données expérimentales.

On fait attention au fait qu'en aucun cas les résultats de mesures ne prouvent la validité d'un modèle (c'est-à-dire qu'il est pertinent scientifiquement de modéliser de cette façon la situation étudiée). La conclusion la plus positive à laquelle on puisse arriver est de déclarer « le modèle proposé est compatible avec les résultats des mesures », mais cela est parfois le cas avec un modèle farfelu scientifiquement, et plusieurs modèles totalement différents peuvent être compatibles avec les résultats de mesures. La compatibilité modèle-mesures ne dispense donc pas de réfléchir en amont aux hypothèses utilisées pour modéliser.

Chapitre F

Simulations de la variabilité

I Introduction

Bien que la variabilité des grandeurs mesurées existe toujours, il est parfois difficile d'y avoir accès par la mesure (par exemple si la résolution de l'appareil est plus grande que la variabilité. D'autre part, dans certaines situations, il peut être parfois très compliqué de réaliser une étude analytique de toutes les données accumulées car les mathématiques deviendraient excessivement compliquées (par exemple pour calculer des incertitudes-types composées en dehors des cas simples listés au D-IV). On peut aussi être confrontés à un manque de temps ou de moyens pour réaliser les nombreuses mesures permettant d'obtenir suffisamment de données expérimentales. Dans toutes ces situations, on peut procéder à des simulations de la variabilité, permettant de prévoir ce qu'aurait produit comme résultats la répétition de nombreuses mesures indépendantes.

II Méthode de Monte Carlo

C'est la méthode préconisée en CPGE. Elle consiste à réaliser des tirages aléatoires de grandeurs en s'appuyant sur des raisonnements probabilistes. Son nom fait allusion aux jeux de hasard pratiqués dans les casinos de… Monte Carlo.

III Simulation de la variabilité d'une grandeur

Pour simuler la variabilité d'une grandeur, il faut au préalable avoir choisi un modèle pour cette variabilité : la simulation ne dispense pas de l'étude préalable du processus de mesurage ! Il faut ensuite réfléchir au nombre de tirages aléatoires qu'on veut simuler. Avec les moyens informatiques modernes, on peut facilement simuler de centaines, des milliers voire des dizaines de milliers de tirages, ce qui est souvent suffisant pour obtenir des simulations de bonne qualité. On comprend au passage l'intérêt de la simulation en terme de gain de temps par rapport aux mesurages réels : réaliser des dizaines de milliers de mesures indépendantes de la même grandeur est tout simplement hors de portée dans des conditions usuelles de travaux pratiques.

Exemples On montre sur la figure F.1 l'évolution des résultats de simulation et la confrontation avec le résultat théorique rigoureux, pour un modèle de variabilité rectangulaire et différents nombres de tirages (10, 1000, 10 000, 100 000 000). On constate évidemment qu'en augmentant le nombre de tirages les résultats simulés se rapprochent des résultats théoriques. $n = 10000$ **tirages sont généralement largement suffisants pour avoir une simulation de bonne qualité**. On fait néanmoins attention que les calculs peuvent prendre beaucoup de temps ; si cela devient problématique, un tirage de quelques milliers de valeurs est un très bon compromis. On constate également que pour un nombre très élevé de tirages (100 000 000), la distribution obtenue est bien quasiment rectangulaire.
Grâce à la figure F.2, on arrive aux mêmes conclusions pour un modèle de variabilité gaussien.

Avec python

- variabilité rectangulaire : fonction `random.uniform()` de la bibliothèque de calculs numériques NumPy.
- variabilité gaussienne, fonction `random.normal()` de la bibliothèque de calculs numériques NumPy.

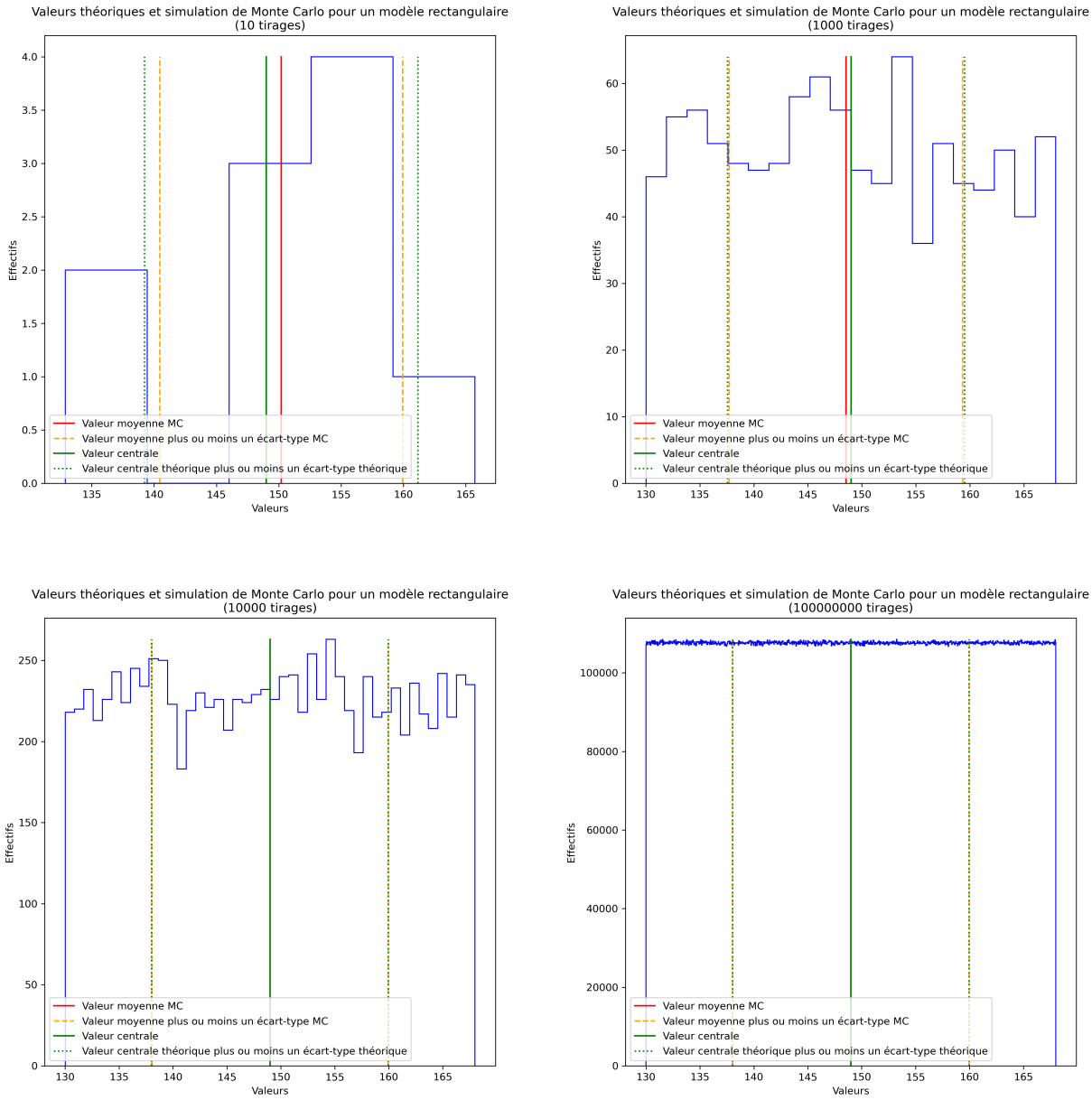


FIGURE F.1 – Différentes simulations de variabilité rectangulaire (10, 1000, 10 000, 100 000 000 tirages).

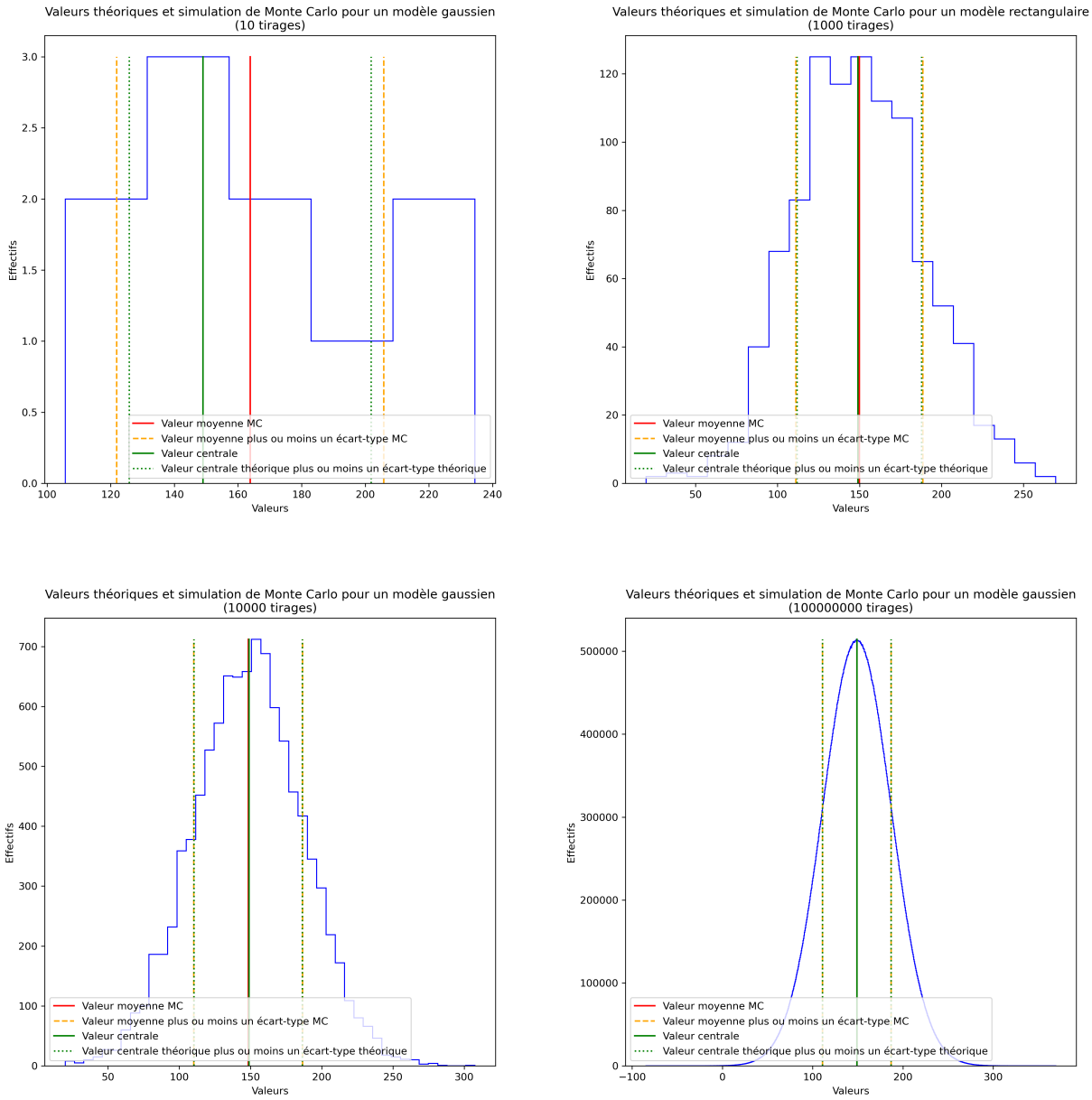


FIGURE F.2 – Différentes simulations de variabilité gaussienne (10, 1000, 10 000, 100 000 000 tirages).

IV Simulation de la variabilité de grandeurs composées

Pour simuler la variabilité d'un mesurande dépendant de plusieurs grandeurs d'entrée et déterminer une valeur de son incertitude-type composée, on peut dans les cas simples utiliser les formules de propagation vues au D-IV, mais aussi procéder à des simulations. Dans eles cas plus compliqués, pour lesquels ils n'existent pas de formules de propagation, la simulation est la seule alternative.
L'idée générale est de simuler par la méthode de Monte Carlo les résultats de nombreux mesurages indépendants pour chaque grandeur d'entrée, puis d'en déduire les valeurs attribuables au mesurande et enfin d'en déterminer l'incertitude-type résultante.

Exemple pour une relation du type $z = x\,y$, on a simulé des ensembles $\{x_i\}$ et $\{y_i\}$ de n valeurs de x et y puis on en a déduit n valeurs de z par la relation $\forall i \in [\![0\,;\,n-1]\!]$, $z_i = x_i\,y_i$ et représenté la variabilité simulée de z à la figure F.3.
Code python disponible sur le wiki : `https://physique.mpe-charlemagne.fr`

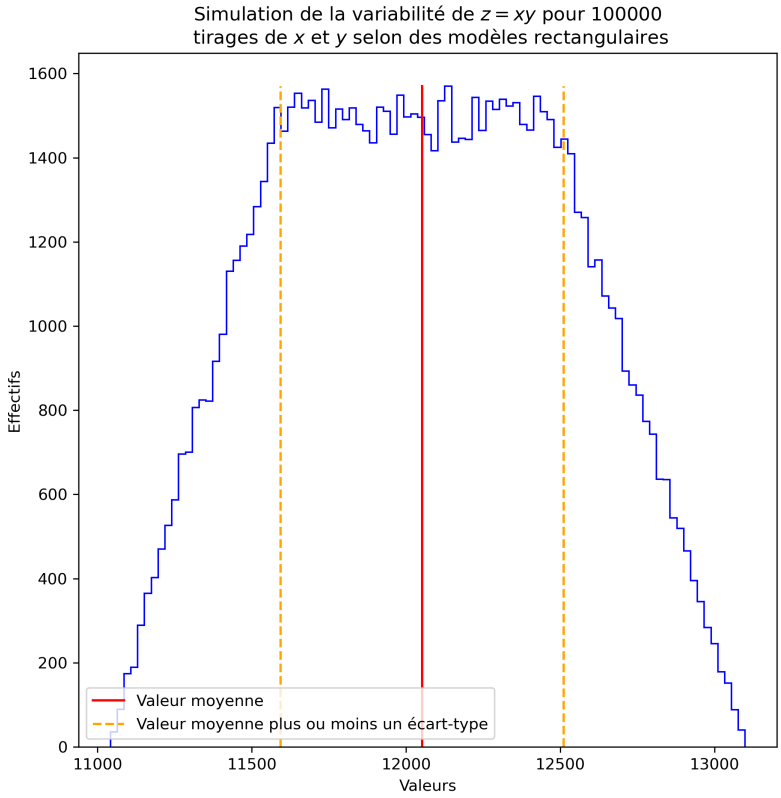


FIGURE F.3 – On a réalisé 100000 tirages de valeurs de x selon un modèle rectangulaire de valeur centrale 123 et d'étendue 6, et 100000 tirages de valeurs de y selon un modèle rectangulaire de valeur centrale 98 et d'étendue 12. On en a déduit l'histogramme de z.

V Variabilité des paramètres d'un modèle

Quand on ajuste les paramètres d'un modèle grâce à des données expérimentales, on peut déterminer si le modèle est en accord avec les valeurs mesurées grâce aux barres d'incertitudes et aux résidus normalisés. C'est ce qu'on a fait au chapitre E « Ajustements de modèles et comparaisons aux mesures ».
Avec un ajustement, on détermine les meilleures estimations des paramètres (par exemple l'estimation de la pente $\bar{p}$ et de l'ordonnée à l'origine $\bar{b}$ pour le modèle affine). Ces estimations sont des valeurs qui elles-mêmes sont incertaines puisqu'elles sont issues de données expérimentales. On peut donc déterminer leurs incertitudes-types.
On peut :

- acquérir expérimentalement de nombreux jeux de données indépendants, puis faire un ajustement linéaire pour chaque jeux de données, puis faire des statistiques sur les résultats de tous ces ajustements pour en déduite les incertitudes-types sur les paramètres du modèle ;
- modéliser la variabilité des grandeurs dont on cherche à déterminer les paramètres par ajustement, et simuler la réalisation de nombreuses expériences indépendantes grâce à la méthode de Monte Carlo.

Annexes

Table 1 – Lettres minuscules grecques utilisées en sciences physiques

Minuscule	Nom	Utilisation
α	alpha	Géométrie : angle. Physique nucléaire : rayonnement particulaire peu pénétrant formé de noyaux d'Hélium à haute énergie, et associé à la radioactivité. Physique : coefficient de dilatation linéaire.
β	beta	Acoustique : intensité sonore. Géométrie : angle. Thermodynamique : $\frac{1}{k_B T}$. Physique nucléaire : rayonnement particulaire moyennement pénétrant formé d'électrons à haute énergie, et associé à la radioactivité.
γ	gamma	Physique nucléaire : rayonnement électromagnétique à très haute énergie s'étalant au-delà des rayons X en fréquence et associé à la radioactivité. Optique : grandissement transversal. Chimie : conductivité électrique d'une solution. Thermodynamique : rapport des capacités calorifiques d'un gaz parfait. Électricité : conductivité électrique.
δ	delta	Physique : forme différentielle ; radical placé devant une grandeur indiquant une variation infinitésimale de celle-ci. P. ex. δx, $\delta\varphi$, etc.
ϵ, ε	epsilon	Mathématiques et physique : symbole d'une variation infinitésimale. Utilisé seul à la différence du radical δ. Résistance des matériaux : désigne une déformation relative. Thermodynamique : émissivité thermique. Électromagnétisme : permittivité diélectrique.
η	eta	Physique des fluides : viscosité. Électrocinétique : intensité du courant électromoteur d'une source de courant.
θ	theta	Géométrie : désigne la deuxième coordonnée sphérique ou l'angle polaire.
κ	kappa	Géométrie, Cinématique : utilisé pour désigner la courbure locale d'une fonction ou d'une trajectoire. Physique : constante de rappel d'un ressort.
λ	lambda	Électromagnétisme : longueur d'onde d'un phénomène périodique. Géométrie spatiale : longitude. Physique : mesure une conductibilité thermique. Chimie : conductivité molaire limite d'un soluté.
μ	mu	Physique nucléaire ou quantique : utilisé pour désigner le moment orbital (vectoriel) d'une particule ou d'un système atomique en rotation. Physique : utilisé pour désigner une constante de friction ou une masse volumique
ν	nu	Physique, Électricité : fréquence d'un phénomène périodique liée à la longueur d'onde λ et à la célérité c par la relation $\nu = \frac{c}{\lambda}$. Chimie : coefficient stœchiométrique algébrique.
ξ	xi	Physique, Mécanique : constante d'amortissement. Chimie : avancement de réaction.
π	pi	Géométrie, trigonométrie : rapport entre le périmètre d'un cercle et son diamètre (3.14159265...). Électromagnétisme : désigne le vecteur de Poynting.
ρ	rho	Géométrie : parfois utilisée pour désigner la coordonnée radiale en repérage polaire ou cylindrique. Physique, Électricité : résistivité d'un conducteur (résistance par unité de longueur et unité de section). Physique : masse volumique d'une substance, souvent confondue avec la densité ; densité volumique de charge électrique.
σ	sigma	Thermodynamique : « constante » de Stefan liant l'émissivité radiante du corps noir à la température (absolue). Également utilisée pour désigner la constante de Boltzmann. Statistiques : écart-type. Résistance des matériaux : désigne une contrainte. Électricité : conductivité électrique.
τ	tau	Physique : constante de temps encore appelée temps de relaxation.
ϕ, φ	phi	Géométrie : désigne souvent la troisième coordonnée sphérique ou la deuxième coordonnée cylindro-polaire. Signaux : phase du signal.
χ	chi	Optique physique : constante de Rabi (lasers). Thermodynamique : coefficient de compressibilité.
ψ	psi	Mécanique ondulatoire ou quantique : fonction d'onde. Géométrie : désigne parfois la deuxième coordonnée en repérage polaire.
ω	omega	Géométrie, Cinématique : vitesse angulaire d'un point ou d'un solide en rotation. Signaux : pulsation d'un signal périodique.

Table 2 – Lettres majuscules grecques

Majuscule	Nom	Utilisation
A	alpha	*Peu ou pas utilisé du fait de son absence de lisibilité distinctive.*
B	beta	*Peu ou pas utilisé du fait de son absence de lisibilité distinctive.*
Γ	gamma	*Peu ou pas utilisé.*
Δ	delta	Mathématiques : différence ; variation finie d'une fonction.
E	epsilon	*Peu ou pas utilisé du fait de son absence de lisibilité distinctive.*
Z	zeta	*Peu ou pas utilisé du fait de son absence de lisibilité distinctive.*
H	eta	*Peu ou pas utilisé du fait de son absence de lisibilité distinctive.*
Θ	theta	Physique, Thermodynamique : désigne une température, en général absolue.
I	iota	*Peu ou pas utilisé du fait de son absence de lisibilité distinctive.*
K	kappa	*Peu ou pas utilisé du fait de son absence de lisibilité distinctive.*
Λ	lambda	Mathématiques : sert parfois à désigner la valeur propre d'une matrice.
M	mu	*Peu ou pas utilisé du fait de son absence de lisibilité distinctive.*
N	nu	*Peu ou pas utilisé du fait de son absence de lisibilité distinctive.*
Ξ	xi	*Peu ou pas utilisé.*
O	omicron	*Peu ou pas utilisé du fait de son absence de lisibilité distinctive.*
Π	pi	*Peu ou pas utilisé du fait de son absence de lisibilité distinctive.*
P	rho	*Peu ou pas utilisé du fait de son absence de lisibilité distinctive.*
Σ	sigma	Mathématiques : s'utilise pour des sommes d'objets distincts de même nature. Géométrie : désigne une surface.
T	tau	*Peu ou pas utilisé du fait de son absence de lisibilité distinctive.*
Y	upsilon	*Peu ou pas utilisé du fait de son absence de lisibilité distinctive.*
Φ	phi	Physique : parfois utilisée pour désigner un flux magnétique ou lumineux.
X	chi	*Peu ou pas utilisé du fait de son absence de lisibilité distinctive.*
Ψ	psi	Mécanique ondulatoire ou quantique : fonction d'onde sous la notation $\langle\Psi\vert$ ou $\vert\Psi\rangle$
Ω	omega	Électricité : unité de résistance ohmique. Se prononce alors « Ohm ».

Table 3 – Constantes fondamentales et autres constantes

Constantes fondamentales du SI			
Symbole	**Valeur**	**Unité**	**Nom**
k_B	$1{,}380\,649 \times 10^{-23}$	$\mathrm{J\,K^{-1}}$	constante de Bolztmann (valeur exacte)
$\mathcal{N}_\mathcal{A}$	$6{,}022\,140\,76 \times 10^{23}$	$\mathrm{mol^{-1}}$	nombre d'Avogadro (valeur exacte)
e	$1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}$	C	charge électrique élémentaire (valeur exacte)
c	$2{,}997\,924\,58 \times 10^{8}$	$\mathrm{m\,s^{-1}}$	vitesse de la lumière dans le vide (valeur exacte)
h	$6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}$	J s	constante de Planck (valeur exacte)
$\Delta\nu_{Cs}$	9 192 631 770	Hz	fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé, (valeur exacte)
K_{cd}	683	$\mathrm{lm\,W^{-1}}$	efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} Hz (valeur exacte)

Autres constantes			
Symbole	**Valeur**	**Unité**	**Nom**
$R = \mathcal{N}_A\, k_B$	8,314 462 618	$\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$	constante des gaz parfaits (valeur exacte)
G	$6{,}672\,59 \times 10^{-11}$	$\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$	constante de gravitation
m_e	$0{,}910\,938\,97 \times 10^{-30}$	kg	masse de l'électron
m_p	$1{,}672\,623\,1 \times 10^{-27}$	kg	masse du proton
ϵ_0	$8{,}854\,187\,817 \times 10^{-12}$	$\mathrm{F\,m^{-1}}$	permittivité diélectrique du vide
$\mu_0 = \frac{1}{c^2\,\epsilon_0}$	$4\pi \times 10^{-7}$	$\mathrm{H\,m^{-1}}$	perméabilité magnétique du vide

Table 4 – Table de Student

On présente ci-dessous une table de Student, qui permet de déterminer le facteur d'élargissement k utile pour calculer les incertitudes élargies.

Exemple d'utilisation : on souhaite déterminer la valeur moyenne d'une grandeur dont on a mesuré $n = 6$ valeurs indépendantes. Le nombre de degrés de liberté associé est $n - 1 = 5$. Si on souhaite le facteur d'élargissement à un niveau de confiance de 65 %, on lit l'intersection de la ligne 5 et de la colonne 95 %, c'est-à-dire $k = 2,571$.

Degrés de liberté ↓	80%	90%	95%	98%	99%	← Niveau de confiance
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	
...						
∞			1,96			

Dans notre exemple, on a admis que le nombre de degrés de liberté est $m - 1$. Ce résultat, qui est souvent vrai quand on ne souhaite déterminer qu'une moyenne, n'est pas à connaître. Nous rencontrerons d'autres situations lors des TP et des logiciels pourront alors nous aider à déterminer ce nombre de degrés de liberté.

On remarque que, pour un niveau de confiance à 95 %, le facteur d'élargissement tend vers la valeur 1,96 qu'on arrondit souvent à 2.

La table ci-dessus est disponible sur le site `https://physique.charlemagne.fr`.

TABLE 5 – Préfixes du système international d'unités

10^n	Préfixe	Symbole	Écriture décimale
10^{15}	péta	P	1 000 000 000 000 000
10^{12}	téra	T	1 000 000 000 000
10^{9}	giga	G	1 000 000 000
10^{6}	méga	M	1 000 000
10^{3}	kilo	k	1000
10^{2}	hecto	h	100
10^{1}	déca	da	10
1	(aucun)	—	1
10^{-1}	déci	d	0,1
10^{-2}	centi	c	0,01
10^{-3}	milli	m	0,001
10^{-6}	micro	µ	0,000 001
10^{-9}	nano	n	0,000 000 001
10^{-12}	pico	p	0,000 000 000 001
10^{-15}	femto	f	0,000 000 000 000 001

Références

1. *Le système international d'unités*, BIPM, 9e édition, 2019, v1.08, `https://www.bipm.org/documents/20126/41483022/SI-Brochure-9-FR.pdf`
2. *Évaluation des données de mesure — Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure.* JCGM–BIPM, 2008.
3. *Mesure et incertitudes au lycée*, Ministère de l'éducation nationale, Éduscol, mai 2021. `https://eduscol.education.fr/1648/programmes-et-ressources-en-physique-chimie-voie-gt`
4. *Guide EURACHEM / CITAC Quantifier l'Incertitude dans les Mesures Analytiques.* Deuxième Édition.
5. *Scolie sur le Système international d'unités (SI).* ROUVEL David, BUP n°911, février 2009, pages 205–223.
6. *La relation de conjugaison et la régression linéaire. Première partie : critique.* BROWAEYS Julien et le groupe IREM « mesurer en physique-chimie », BUP n°1032, Vol. 115, mars 2021, pages 347–365.
7. *La relation de conjugaison et la régression linéaire. Deuxième partie : alternative.* BROWAEYS Julien, BEAU Tristan et le groupe IREM « mesurer en physique-chimie », BUP n°1033, Vol. 115, avril 2021, pages 475–487.
8. *La relation de conjugaison et la régression linéaire. Troisième partie : développements.* BROWAEYS Julien et le groupe IREM « mesurer en physique-chimie », BUP n°1034, Vol. 115, mai 2021, pages 561–572.
9. *Exploitation d'une série de mesures.* MOREAU René, BUP n°596, juillet-août-septembre 1977, pages 1249-1303.
10. *Physique chimie en PTSI ert PT.* THIBIERGE Étienne, `https://www.etienne-thibierge.fr`, consulté en août 2024.